

# Diferenciální rovnice

M1030 Matematika pro biochemiky  
26. 11. 2020

## Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Základní pojmy

Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad f(x)dx - dy = 0$$

Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

Příklady

Aplikace

# Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

# Základní pojmy

*Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu (ODR)* je rovnost, v níž vystupuje funkce (závisle proměnná), její první derivace a příslušná nezávisle proměnná.

# Základní pojmy

*Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu* (ODR) je rovnost, v níž vystupuje funkce (závisle proměnná), její první derivace a příslušná nezávisle proměnná.

*Řešit* tuto rovnici znamená najít funkci (všechny funkce), která ji splňuje.

# Základní pojmy

*Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu* (ODR) je rovnost, v níž vystupuje funkce (závisle proměnná), její první derivace a příslušná nezávisle proměnná.

*Řešit* tuto rovnici znamená najít funkci (všechny funkce), která ji splňuje.

Například, je-li závisle proměnná  $y$  a nezávisle proměnná  $x$ , pak takovou rovnicí je:

$$F(x, y, y') = 0$$

# Základní pojmy

*Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu* (ODR) je rovnost, v níž vystupuje funkce (závisle proměnná), její první derivace a příslušná nezávisle proměnná.

Řešit tuto rovnici znamená najít funkci (všechny funkce), která ji splňuje.

Například, je-li závisle proměnná  $y$  a nezávisle proměnná  $x$ , pak takovou rovnicí je:

$$F(x, y, y') = 0$$

Alternativně: *ODR* je rovnost, v níž vystupují dvě proměnné a jejich diferenciály. Např.

$$G(x, y, dx, dy) = 0$$

V tomto pojetí není explicitně řečeno, která z proměnných je závislá a která nezávislá.

# Základní pojmy

**Příklad:**

$$xy' - y = 0$$

Řešení: funkce

$$y = cx,$$

kde  $c$  je libovolná konstanta.

$$xdy - ydx = 0$$

Řešení: vztah proměnných

$$ax = by,$$

kde  $a, b$  jsou libovolné konstanty.

# Základní pojmy

**Příklad:**

$$xy' - y = 0$$

Řešení: funkce

$$y = cx,$$

kde  $c$  je libovolná konstanta.

Zkouška:  $y' = c,$

$$xy' - y = xc - cx = 0$$

$$xdy - ydx = 0$$

Řešení: vztah proměnných

$$ax = by,$$

kde  $a, b$  jsou libovolné konstanty.

Zkouška:  $adx = bdy$

$$by = ax$$

---

$$abydx = abxdy$$



# Základní pojmy

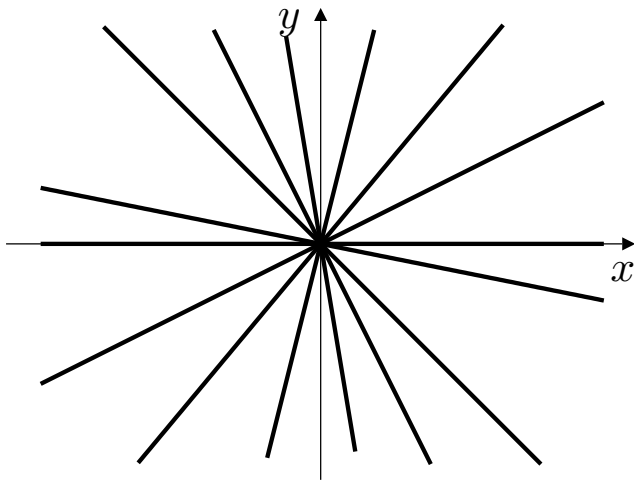
**Příklad:**

$$xy' - y = 0$$

Řešení: funkce

$$y = cx,$$

kde  $c$  je libovolná konstanta.

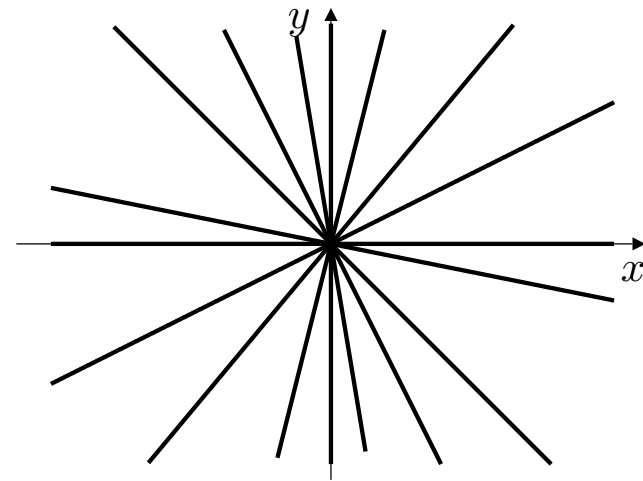


$$xdy - ydx = 0$$

Řešení: vztah proměnných

$$ax = by,$$

kde  $a, b$  jsou libovolné konstanty.



# Základní pojmy

**Příklad:**

$$xy' - y = 0$$

Řešení: funkce

$$y = cx,$$

kde  $c$  je libovolná konstanta.

$$xdy - ydx = 0$$

Řešení: vztah proměnných

$$ax = by,$$

kde  $a, b$  jsou libovolné konstanty.

---

*Obecné řešení ODR:* řešení vyjádřené pomocí libovolných parametrů.

*Partikulární řešení ODR:* jedno konkrétní řešení.

---

$$y = 2x$$

tj.  $c = 2$

$$x = 0$$

tj.  $a = 1, b = 0$

# Základní pojmy

*ODR vyřešená vzhledem k derivaci (explicitní ODR)*

$$y' = f(x, y), \quad \text{alternativně} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$\text{tj. } a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0, \quad \text{přitom } f(x, y) = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)}$$

# Základní pojmy

*ODR vyřešená vzhledem k derivaci (explicitní ODR)*

$$y' = f(x, y), \quad \text{alternativně} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$\text{tj. } a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0, \quad \text{přitom } f(x, y) = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)}$$

*Cauchyova (počáteční) podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

# Základní pojmy

*ODR vyřešená vzhledem k derivaci (explicitní ODR)*

$$y' = f(x, y), \quad \text{alternativně} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$\text{tj. } a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0, \quad \text{přitom } f(x, y) = -\frac{a(x, y)}{b(x, y)}$$

*Cauchyova (počáteční) podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

*Cauchyova (počáteční) úloha pro ODR*: najít řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínku.

# Základní pojmy

*Cauchyova (počáteční) podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

*Cauchyova (počáteční) úloha pro ODR*: najít řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínku.

**Příklad:** Řešení rovnice  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  s podmínkou  $y(2) = 1$ :  $y = \frac{1}{2}x$

# Základní pojmy

*Cauchyova (počáteční) podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

*Cauchyova (počáteční) úloha pro ODR*: najít řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínku.

**Příklad:** Řešení rovnice  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  s podmínkou  $y(2) = 1$ :  $y = \frac{1}{2}x$

Řešení rovnice  $xy' = y$  s podmínkou  $y(0) = 0$ :  $y = cx$

# Základní pojmy

*Cauchyova (počáteční) podmínka*: zadání hodnoty hledané funkce v jedné hodnotě nezávisle proměnné (*počáteční hodnotě*):

$$y(x_0) = y_0$$

*Cauchyova (počáteční) úloha pro ODR*: najít řešení rovnice, které splňuje počáteční podmínku.

**Příklad:** Řešení rovnice  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  s podmínkou  $y(2) = 1$ :  $y = \frac{1}{2}x$

Řešení rovnice  $xy' = y$  s podmínkou  $y(0) = 0$ :  $y = cx$

Řešení rovnice  $xy' = y$  s podmínkou  $y(0) = 2$  neexistuje



## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad \int f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

**Příklad:** Najděte obecné řešení rovnice  $\frac{ds}{dt} = at$ .

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

**Příklad:** Najděte obecné řešení rovnice  $\frac{ds}{dt} = at$ .

$$s = \int atdt = \frac{1}{2}at^2 + c$$

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad \int f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x), y(x_0) = y_0$ :

1.
  - Najdeme obecné řešení rovnice,
  - dosadíme do podmínky,
  - z ní vypočítáme hodnotu konstanty

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

1.
  - Najdeme obecné řešení rovnice,
  - dosadíme do podmínky,
  - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad \int f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

1.
  - Najdeme obecné řešení rovnice,
  - dosadíme do podmínky,
  - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad \int f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

1.
  - Najdeme obecné řešení rovnice,
  - dosadíme do podmínky,
  - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x)dx$$

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

1.
  - Najdeme obecné řešení rovnice,
  - dosadíme do podmínky,
  - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x)dx$$

$$d\eta = f(\xi)d\xi$$



## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

1.
  - Najdeme obecné řešení rovnice,
  - dosadíme do podmínky,
  - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x)dx$$

$$d\eta = f(\xi)d\xi$$

$$\int_{y_0}^y d\eta = \int_{x_0}^x f(\xi)d\xi$$

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

1.
  - Najdeme obecné řešení rovnice,
  - dosadíme do podmínky,
  - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x)dx$$

$$d\eta = f(\xi)d\xi$$

$$\int_{y_0}^y d\eta = \int_{x_0}^x f(\xi)d\xi$$

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x f(\xi)d\xi$$

# Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

1.
  - Najdeme obecné řešení rovnice,
  - dosadíme do podmínky,
  - z ní vypočítáme hodnotu konstanty
2. Přímá integrace:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x)dx$$

$$d\eta = f(\xi)d\xi$$

$$\int_{y_0}^y d\eta = \int_{x_0}^x f(\xi)d\xi$$

$$y - y_0 = \int_{x_0}^x f(\xi)d\xi \quad \rightarrow \quad y = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi)d\xi$$

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad \int f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x), y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Najděte řešení úlohy  $\frac{ds}{dt} = at, s(0) = 0$ .

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad \int f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Najděte řešení úlohy  $\frac{ds}{dt} = at$ ,  $s(0) = 0$ .

Obecné řešení:  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad \int f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Najděte řešení úlohy  $\frac{ds}{dt} = at$ ,  $s(0) = 0$ .

Obecné řešení:  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$

$$s(0) = 0 = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + c, \text{ tj. } c = 0. \text{ Tedy } s(t) = \frac{1}{2}at^2.$$

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad \int f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Najděte řešení úlohy  $\frac{ds}{dt} = at$ ,  $s(0) = 0$ .

Obecné řešení:  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$

$$s(0) = 0 = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + c, \text{ tj. } c = 0. \text{ Tedy } s(t) = \frac{1}{2}at^2.$$

Přímá integrace:

$$ds = atdt$$

## Rovnice typu

$$y' = f(x), \quad f(x)dx - dy = 0$$

Řešením této rovnice je primitivní funkce k funkci  $f$ .  
U obecného řešení píšeme integrační konstantu.

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Najděte řešení úlohy  $\frac{ds}{dt} = at$ ,  $s(0) = 0$ .

Obecné řešení:  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + c$

$$s(0) = 0 = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + c, \text{ tj. } c = 0. \text{ Tedy } s(t) = \frac{1}{2}at^2.$$

Přímá integrace:

$$\begin{aligned} ds &= atdt \\ \int_0^s d\sigma &= \int_0^t a\tau d\tau = a \left[ \frac{1}{2}\tau^2 \right]_{\tau=0}^t = \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$



## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Nezávisle proměnnou v přírodovědeckých aplikacích bývá čas.

Procesy v přírodě probíhají podle vlastních (*αυτος*), tj. přírodních, zákonů (*νομοι*). Tyto zákony nejsou závislé na čase, proto se na pravé straně rovnice neobjevuje nezávisle proměnná.

# Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Rovnici přepíšeme

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{dy}{g(y)} = dx$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{dy}{g(y)} = dx$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{dy}{g(y)} = dx$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c.$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{dy}{g(y)} = dx$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c.$$

Z této rovnosti vyjádříme  $y$ .

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{dy}{g(y)} = dx$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c.$$

Z této rovnosti vyjádříme  $y$ .

---

Úvaha je korektní pouze pro  $g(y) \neq 0$ .

# Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{dy}{g(y)} = dx$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c.$$

Z této rovnosti vyjádříme  $y$ .

---

Pokud existují hodnoty  $y^* \in D(g)$  takové, že  $g(y^*) = 0$ , pak také konstantní funkce

$$y = y^*$$

jsou řešením dané autonomní rovnice.



## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

Rovnici přepíšeme a upravíme

$$\frac{dy}{g(y)} = dx$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c.$$

Z této rovnosti vyjádříme  $y$ .

---

Pokud existují hodnoty  $y^* \in D(g)$  takové, že  $g(y^*) = 0$ , pak také konstantní funkce

$$y = y^*$$

jsou řešením dané autonomní rovnice.

Konstantní řešení nazýváme *stacionární* nebo *rovnovážná*.

Je-li nezávisle proměnnou čas, pak vyjadřují nějakou dynamickou rovnováhu modelovaného děje.

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklad:** Řešte rovnici  $y' = 2y - 3$ .

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklad:** Řešte rovnici  $y' = 2y - 3$ .

$$y = \frac{3}{2}$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklad:** Řešte rovnici  $y' = 2y - 3$ .

$$y = \frac{3}{2} \quad \int \frac{dy}{2y - 3} = \int dx$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklad:** Řešte rovnici  $y' = 2y - 3$ .

$$y = \frac{3}{2} \quad \int \frac{dy}{2y - 3} = \int dx$$
$$\frac{1}{2} \ln |2y - 3| = x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklad:** Řešte rovnici  $y' = 2y - 3$ .

$$\begin{aligned} y = \frac{3}{2} \quad \int \frac{dy}{2y - 3} &= \int dx \\ \frac{1}{2} \ln |2y - 3| &= x + c && c \in \mathbb{R} \\ |2y - 3| &= e^{2x} e^{2c} \end{aligned}$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklad:** Řešte rovnici  $y' = 2y - 3$ .

$$\begin{aligned} y = \frac{3}{2} \quad \int \frac{dy}{2y - 3} &= \int dx \\ \frac{1}{2} \ln |2y - 3| &= x + c && c \in \mathbb{R} \\ |2y - 3| &= e^{2x} e^{2c} \\ 2y - 3 &= c_1 e^{2x} && c_1 = \pm e^{2c} \neq 0 \end{aligned}$$



## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklad:** Řešte rovnici  $y' = 2y - 3$ .

$$\begin{aligned} y = \frac{3}{2} \quad \int \frac{dy}{2y - 3} &= \int dx \\ \frac{1}{2} \ln |2y - 3| &= x + c && c \in \mathbb{R} \\ |2y - 3| &= e^{2x} e^{2c} \\ 2y - 3 &= c_1 e^{2x} && c_1 = \pm e^{2c} \neq 0 \\ y &= \frac{1}{2} (c_1 e^{2x} + 3) \end{aligned}$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklad:** Řešte rovnici  $y' = 2y - 3$ .

$$\begin{aligned} y = \frac{3}{2} \quad \int \frac{dy}{2y - 3} &= \int dx \\ \frac{1}{2} \ln |2y - 3| &= x + c && c \in \mathbb{R} \\ |2y - 3| &= e^{2x} e^{2c} \\ 2y - 3 &= c_1 e^{2x} && c_1 = \pm e^{2c} \neq 0 \\ y &= \frac{1}{2} (c_1 e^{2x} + 3) \\ y &= C e^{2x} + \frac{3}{2} && C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklad:** Řešte rovnici  $y' = 2y - 3$ .

$$y = Ce^{2x} + \frac{3}{2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

1. Identifikace konstanty z obecného řešení
2. Přímá integrace v mezích od  $y_0$  do  $y$  (na levé straně) a od  $x_0$  do  $x$  (na pravé straně)

## Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Řešte úlohu  $y' = 2y - 3$ ,  $y(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ .

# Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Řešte úlohu  $y' = 2y - 3$ ,  $y(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ .

1. Z obecného řešení:  $y = Ce^{2x} + \frac{3}{2}$   
 $-\frac{1}{2} = Ce^1 + \frac{3}{2} \rightarrow C = -2e^{-1}$

$$y = \frac{3}{2} - 2e^{2x-1}$$

# Autonomní rovnice

$$y' = g(y), \quad g(y)dx - dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + c, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Řešte úlohu  $y' = 2y - 3$ ,  $y(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ .

1. Z obecného řešení:  $y = Ce^{2x} + \frac{3}{2}$   
 $-\frac{1}{2} = Ce^1 + \frac{3}{2} \rightarrow C = -2e^{-1}$

$$y = \frac{3}{2} - 2e^{2x-1}$$

2. Přímá integrace:  $y_0 = -\frac{1}{2} \neq 0$ , tedy  $\int_{-\frac{1}{2}}^y \frac{d\eta}{2\eta - 3} = \int_{\frac{1}{2}}^x d\xi$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^y \frac{d\eta}{2\eta - 3} = \left[ \frac{1}{2} \ln |2\eta - 3| \right]_{\eta=-\frac{1}{2}}^y = \frac{1}{2} \ln \frac{|2y - 3|}{|-4|} = \frac{1}{2} \ln \frac{3 - 2y}{4}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^x d\xi = x - \frac{1}{2}$$

$$\ln \frac{3 - 2y}{4} = 2x - 1$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

Rovnici přepíšeme

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$



## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

Rovnici přepíšeme, upravíme

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

Rovnici přepíšeme, upravíme a integrujeme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

Rovnici přepíšeme, upravíme a integrujeme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

To je *implicitní* zápis řešení rovnice, z něho (někdy) vyjádříme řešení  $y = y(x)$  *explicitně*.

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

Rovnici přepíšeme, upravíme a integrujeme

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

To je *implicitní* zápis řešení rovnice, z něho (někdy) vyjádříme řešení  $y = y(x)$  *explicitně*.

Pokud existují hodnoty  $y^* \in D(g)$  takové, že  $g(y^*) = 0$ , pak také konstantní funkce

$$y = y^*$$

jsou řešením dané diferenciální rovnice.

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{y^2}{x}$ .

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{y^2}{x}$ .

$$y = 0$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{y^2}{x}$ .

$$y = 0 \qquad \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x}dx$$



## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{y^2}{x}$ .

$$y = 0 \quad \int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{y^2}{x}$ .

$$y = 0 \quad \int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx$$
$$-\frac{1}{y} = \ln |x| + c$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{y^2}{x}$ .

$$\begin{aligned} y = 0 \quad & \int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx \\ & -\frac{1}{y} = \ln |x| + c \\ & y = -\frac{1}{c + \ln |x|} \end{aligned}$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{y^2}{x}$ .

$$y = -\frac{1}{c + \ln|x|}, \quad y = 0$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{y^2}{x}$ .

$$y = -\frac{1}{c + \ln|x|}, \quad y = 0$$

$$C = -\frac{1}{c}$$

$$y = \frac{C}{1 - C \ln|x|}$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{x(1-y)}{1+x}$ .

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

**Příklady:** Řešte rovnici  $y' = \frac{x(1-y)}{1+x}$ .

$$y = 1 \quad \int \frac{dy}{1-y} = \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$-\ln |1-y| = x - \ln |1+x| + c$$

$$|1-y| = |1+x|e^{-x-c}$$

$$1-y = C(1+x)e^{-x}$$

$$y = 1 - C(1+x)e^{-x}$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :



## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

1. Identifikace konstanty z obecného řešení
2. Přímá integrace v mezích od  $y_0$  do  $y$  (na levé straně) a od  $x_0$  do  $x$  (na pravé straně)

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Řešte úlohu  $y' = \frac{x(1-y)}{1+x}$ ,  $y(1) = -1$ .

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Řešte úlohu  $y' = \frac{x(1-y)}{1+x}$ ,  $y(1) = -1$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^y \frac{d\eta}{1-\eta} &= \int_1^x \left(1 - \frac{1}{1+\xi}\right) d\xi \\ -\ln \left| \frac{1-y}{2} \right| &= x - 1 - \ln \left| \frac{1+x}{2} \right| \\ \ln \frac{1-y}{2} &= -x + 1 + \ln \frac{1+x}{2} \\ 1-y &= e^{1-x}(1+x) \end{aligned}$$

## Rovnice se separovanými proměnnými

$$y' = f(x)g(y), \quad a(x)dx + b(y)dy = 0$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \text{případně také } y = y^* \text{ kde } g(y^*) = 0$$

Řešení Cauchyovy úlohy  $y' = f(y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ :

**Příklad:** Řešte úlohu  $y' = \frac{x(1-y)}{1+x}$ ,  $y(1) = -1$ .

$$\int_{-1}^y \frac{d\eta}{1-\eta} = \int_1^x \left(1 - \frac{1}{1+\xi}\right) d\xi$$

$$-\ln \left| \frac{1-y}{2} \right| = x - 1 - \ln \left| \frac{1+x}{2} \right|$$

$$\ln \frac{1-y}{2} = -x + 1 + \ln \frac{1+x}{2}$$

$$1-y = e^{1-x}(1+x)$$

$$y = 1 - (1+x)e^{1-x}$$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [ $\text{m}^3$ ] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [ $\text{g m}^{-3}$ ]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu



# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [ $\text{m}^3$ ] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [ $\text{g m}^{-3}$ ]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$  – množství polutantu v jezeře v čase  $t$  [g]

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$  – množství polutantu v jezeře v čase  $t$  [g]

$v\Delta t$  – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky  $\Delta t$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$  – množství polutantu v jezeře v čase  $t$  [g]

$v\Delta t$  – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky  $\Delta t$

$vx(t)\Delta t$  – množství polutantu, které odteče z jezera za časový interval délky  $\Delta t$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [ $\text{m}^3$ ] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [ $\text{g m}^{-3}$ ]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$  – množství polutantu v jezeře v čase  $t$  [g]

$v\Delta t$  – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky  $\Delta t$

$vx(t)\Delta t$  – množství polutantu, které odteče z jezera za časový interval délky  $\Delta t$

$$Vx(t + \Delta t) = Vx(t) - vx(t)\Delta t$$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$  – množství polutantu v jezeře v čase  $t$  [g]

$v\Delta t$  – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky  $\Delta t$

$vx(t)\Delta t$  – množství polutantu, které odteče z jezera za časový interval délky  $\Delta t$

$$\begin{aligned} Vx(t + \Delta t) &= Vx(t) - vx(t)\Delta t \\ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= -\frac{v}{V}x(t) \end{aligned}$$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$Vx(t)$  – množství polutantu v jezeře v čase  $t$  [g]

$v\Delta t$  – množství vody, které odteče z jezera za časový interval délky  $\Delta t$

$vx(t)\Delta t$  – množství polutantu, které odteče z jezera za časový interval délky  $\Delta t$

$$\begin{aligned} Vx(t + \Delta t) &= Vx(t) - vx(t)\Delta t \\ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} &= -\frac{v}{V}x(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} &= -\frac{v}{V}x(t) \end{aligned}$$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v}{V}x$$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v}{V}x$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{v}{V}dt$$



# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v}{V}x$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{v}{V}dt$$

$$\int_{m/V}^x \frac{d\xi}{\xi} = -\int_0^t \frac{v}{V}d\tau$$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v}{V}x$$

$$[\ln \xi]_{\xi=m/V}^x = -\frac{v}{V} [\tau]_{\tau=0}^t$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{v}{V} dt$$

$$\int_{m/V}^x \frac{d\xi}{\xi} = -\int_0^t \frac{v}{V} d\tau$$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v}{V}x$$

$$[\ln \xi]_{\xi=m/V}^x = -\frac{v}{V} [\tau]_{\tau=0}^t$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{v}{V} dt$$

$$\ln \frac{x}{m/V} = -\frac{v}{V} t$$

$$\int_{m/V}^x \frac{d\xi}{\xi} = - \int_0^t \frac{v}{V} d\tau$$

# Příklady

Do jezera o objemu  $V$  [m<sup>3</sup>] přitéká i odtéká voda rychlostí  $v$  [m<sup>3</sup>s<sup>-1</sup>]. Do jezera se dostal nějaký polutant o hmotnosti  $m$  [g]. Najděte časový průběh koncentrace polutantu v jezeře.

Předpoklad: proudění v jezeře je dostatečně silné, látka je v něm stále stejnoměrně rozptýlena.

Označení:  $x(t)$  – koncentrace polutantu v čase  $t$  [g m<sup>-3</sup>]  
 $t = 0$  – okamžik, v němž se polutant dostal do jezera  
 $x(0) = \frac{m}{V}$  – počáteční koncentrace polutantu

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v}{V}x$$

$$[\ln \xi]_{\xi=m/V}^x = -\frac{v}{V} [\tau]_{\tau=0}^t$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{v}{V} dt$$

$$\ln \frac{x}{m/V} = -\frac{v}{V} t$$

$$\int_{m/V}^x \frac{d\xi}{\xi} = - \int_0^t \frac{v}{V} d\tau$$

$$x(t) = \frac{m}{V} e^{-\frac{v}{V} t}$$

# Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnosti s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

# Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnosti s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

- Předpoklady:
- káva je v hrnku promíchávána konvektivními proudy
  - změna teploty za krátký časový interval je úměrná
    - rozdílu teplot
    - velikosti povrchu, přes který k výměně tepla dochází
    - času, po který výměna tepla probíhá (Newtonův zákon chladnutí)

# Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnosti s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

- Předpoklady:
- káva je v hrnku promíchávána konvektivními proudy
  - změna teploty za krátký časový interval je úměrná
    - rozdílu teplot
    - velikosti povrchu, přes který k výměně tepla dochází
    - času, po který výměna tepla probíhá (Newtonův zákon chladnutí)

Označení:  $x(t)$  – teplota kávy v čase  $t$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $T$  – pokojová teplota [ $^{\circ}\text{C}$ ]  
 $S$  – obsah hladiny [ $\text{cm}^2$ ]  
 $\kappa$  – konstanta úměrnosti [ $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ]

# Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnosti s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

- Předpoklady:
- káva je v hrnku promíchávána konvektivními proudy
  - změna teploty za krátký časový interval je úměrná
    - rozdílu teplot
    - velikosti povrchu, přes který k výměně tepla dochází
    - času, po který výměna tepla probíhá (Newtonův zákon chladnutí)

Označení:  $x(t)$  – teplota kávy v čase  $t$  [ $^{\circ}\text{C}$ ]

$T$  – pokojová teplota [ $^{\circ}\text{C}$ ]

$S$  – obsah hladiny [ $\text{cm}^2$ ]

$\kappa$  – konstanta úměrnosti [ $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ]

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \kappa S (T - x(t)) \Delta t$$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \kappa S (T - x(t))$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \kappa S (T - x(t))$$



# Příklady

Do hrnku s dokonale izolovanými stěnami nalejeme vroucí kávu, hrnek je v místnosti s pokojovou teplotou. Popište teplotu kávy v průběhu času.

- Předpoklady:
- káva je v hrnku promíchávána konvektivními proudy
  - změna teploty za krátký časový interval je úměrná
    - rozdílu teplot
    - velikosti povrchu, přes který k výměně tepla dochází
    - času, po který výměna tepla probíhá (Newtonův zákon chladnutí)

Označení:  $x(t)$  – teplota kávy v čase  $t$  [°C]

$T$  – pokojová teplota [°C]

$S$  – obsah hladiny [cm<sup>2</sup>]

$\kappa$  – konstanta úměrnosti [cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>]

$$\frac{dx}{\kappa S(T - x)} = dt$$

$$\frac{1}{\kappa S} \int_{100}^x \frac{d\xi}{T - \xi} = \int_0^t d\tau$$

$$-\frac{1}{\kappa S} [\ln(T - \xi)]_{100}^x = [\tau]_0^t$$

$$\ln \frac{T - x}{T - 100} = -\kappa S t$$

$$T - x = (T - 100)e^{-\kappa S t}$$

$$x(t) = T - (T - 100)e^{-\kappa S t}$$

# Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna  $p > 0$ . Určete poločas rozpadu.

# Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna  $p > 0$ . Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

# Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna  $p > 0$ . Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení:  $x(t)$  – množství atomů ve vzorku v čase  $t$   
 $\tau$  – poločas rozpadu

# Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna  $p > 0$ . Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení:  $x(t)$  – množství atomů ve vzorku v čase  $t$   
 $\tau$  – poločas rozpadu

$P(\text{jádro se rozpadne během časového intervalu délky } \Delta t) = p\Delta t$

# Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna  $p > 0$ . Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení:  $x(t)$  – množství atomů ve vzorku v čase  $t$   
 $\tau$  – poločas rozpadu

$$P(\text{jádro se rozpadne během časového intervalu délky } \Delta t) = p\Delta t = \frac{x(t) - x(t + \Delta t)}{x(t)}$$

# Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna  $p > 0$ . Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení:  $x(t)$  – množství atomů ve vzorku v čase  $t$   
 $\tau$  – poločas rozpadu

$$P(\text{jádro se rozpadne během časového intervalu délky } \Delta t) = p\Delta t = \frac{x(t) - x(t + \Delta t)}{x(t)}$$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -px(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -px$$

$$\frac{dx}{x} = -pdt$$

# Příklady

Pravděpodobnost, že se radioaktivní atomové jádro rozpadne během jednotkového času, je rovna  $p > 0$ . Určete poločas rozpadu.

Poločas rozpadu – očekávaný čas, za který se rozpadne polovina atomů ze vzorku.

Označení:  $x(t)$  – množství atomů ve vzorku v čase  $t$   
 $\tau$  – poločas rozpadu

$$P(\text{jádro se rozpadne během časového intervalu délky } \Delta t) = p\Delta t = \frac{x(t) - x(t + \Delta t)}{x(t)}$$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -px(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -px$$

$$\frac{dx}{x} = -pdt$$

$$\int_N^{\frac{1}{2}N} \frac{dx}{x} = -p \int_0^\tau dt$$

$$\ln \frac{\frac{1}{2}N}{N} = -p\tau$$

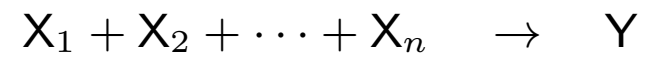
$$\tau = \frac{1}{p} \ln 2$$



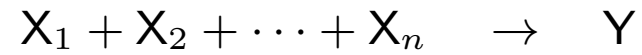
# Aplikace

# Průběh přímých chemických reakcí

# Průběh přímých chemických reakcí

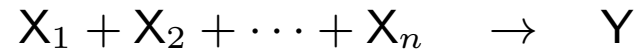


# Průběh přímých chemických reakcí



*Wilhelmyho zákon*: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

# Průběh přímých chemických reakcí

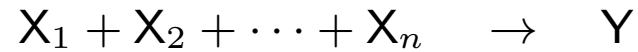


*Wilhelmyho zákon*: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

Označení:  $[Z] = [Z](t)$  Koncentrace látky  $Z$  v čase  $t$

$$\frac{d}{dt}[Y] = k[X_1][X_2] \cdots [X_n]$$

# Průběh přímých chemických reakcí



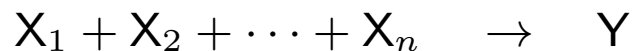
*Wilhelmyho zákon*: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

Označení:  $[Z] = [Z](t)$  Koncentrace látky Z v čase  $t$

$$\frac{d}{dt}[Y] = k[X_1][X_2] \cdots [X_n]$$

**Příklad:** Oxidace  $2\text{NO} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{NO}_2$

# Průběh přímých chemických reakcí



*Wilhelmyho zákon*: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

Označení:  $[Z] = [Z](t)$  Koncentrace látky Z v čase  $t$

$$\frac{d}{dt}[Y] = k[X_1][X_2] \cdots [X_n]$$

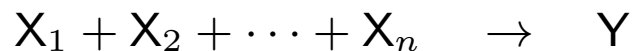
**Příklad:** Oxidace  $2\text{NO} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{NO}_2$

Označení:  $x(t) = [\text{NO}_2](t)$

$a$  – počáteční koncentrace NO

$b$  – počáteční koncentrace  $\text{O}_2$

# Průběh přímých chemických reakcí



*Wilhelmyho zákon*: okamžitá reakční rychlost je přímo úměrná součinu koncentrací reagujících látek.

Označení:  $[Z] = [Z](t)$  Koncentrace látky  $Z$  v čase  $t$

$$\frac{d}{dt}[Y] = k[X_1][X_2] \cdots [X_n]$$

**Příklad:** Oxidace  $2\text{NO} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{NO}_2$

Označení:  $x(t) = [\text{NO}_2](t)$

$a$  – počáteční koncentrace  $\text{NO}$

$b$  – počáteční koncentrace  $\text{O}_2$

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2(b - x)$$

$$x(0) = 0$$



# Průběh přímých chemických reakcí

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2(b-x)$$

$$x(0) = 0$$

$$\int_0^x \frac{d\xi}{(a-\xi)^2(b-\xi)} = k \int_0^t d\tau$$

$$\begin{aligned} kt &= \int_0^x \frac{d\xi}{(a-\xi)^2(b-\xi)} = \int_0^x \left( \frac{1}{b-a} \frac{1}{(a-\xi)^2} + \frac{1}{(b-a)^2} \left( \frac{1}{b-\xi} - \frac{1}{a-\xi} \right) \right) d\xi = \\ &= \left[ \frac{1}{b-a} \frac{-1}{a-\xi} + \frac{1}{(b-a)^2} (-\ln|b-\xi| + \ln|a-\xi|) \right]_{\xi=0}^x = \\ &= \left[ \frac{1}{(a-b)(a-\xi)} + \ln \left| \frac{a-\xi}{b-\xi} \right| \right]_{\xi=0}^x = \frac{1}{(a-b)(a-x)} - \frac{1}{a(a-b)} + \ln \left| \frac{a-x}{b-x} \frac{b}{a} \right| = \\ &= \frac{1}{(a-x)(a-b)} \frac{x}{a} + \ln \frac{a-x}{b-x} \frac{b}{a} \end{aligned}$$