A. Zkouška z M1035, podzim 2021

Příklad. 1. [6 bodů] Spočítejte

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-8x^2+6}{10-x^3}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\ln(1-x)}$,

c) derivaci funkce $f(x) = 2^x \cdot \cos x$,

d) všechny primitivní funkce k funkci $g(x) = \log_3 x$,

e) délku křivky $\{(x, 3x) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [1,3]\}$,

f) všechna řešení diferenciální rovnice $y' = 0,3 \cdot y$.

Řešení. Za každou úlohu je jeden bod.

(a)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-8x^2+6}{10-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-8\frac{1}{x}+\frac{6}{x^3}}{\frac{10}{x^3}-1} = -2.$$

(b) Podle l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{\frac{-1}{1-x}} = -1.$$

(c) $f'(x) = \ln 2\; 2^x \cos x - 2^x \sin x$.

(d) Protože $g(x) = \log_3 x = \dfrac{\ln x}{\ln 3}$, je pomocí per partes

$$\int g(x)\,dx = \frac{1}{\ln 3}\int \ln x\,dx = \frac{1}{\ln 3}\left(x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) =$$
$$= \frac{1}{\ln 3}(x\ln x - x) + c.$$

(e) Pomocí integrálu

$$\int_1^3 \sqrt{1+3^2}\,dx = \sqrt{10}(3-1) = 2\sqrt{10}$$

nebo pomocí Pythagorovy věty: Vzdálenost bodů $[1,3]$ a $[3,9]$ je

$$\sqrt{(3-1)^2+(9-3)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

(f) $y(x) = c\,\mathrm{e}^{0,3x}$, kde $c \in R$.

□

Příklad. 2. [6 bodů] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

a) Najděte limity v krajních bodech definičního oboru.

b) Spočítejte derivaci.

c) Zjistěte, kde je funkce rostoucí na kde klesající.

d) Najděte lokální a globální extrémy funkce.
e) Najděte obor hodnot.
f) Nakreslete graf funkce na intervalu $[-10, 10]$.

Řešení. Za každou podúlohu 1 bod.
(a) Definiční obor je $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

(b)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+2)\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot(2x)}{x^2+1} = \frac{x^2+1-(x+2)x}{(x^2+1)^{3/2}} =$$
$$= \frac{1-2x}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

(c) Na $(-\infty, 1/2)$ je funkce rostoucí, neboť $f'(x) > 0$. Na $(1/2, \infty)$ je funkce klesající, neboť $f'(x) < 0$.

(d) Funkce nabývá jediného extrému, a to globálního maxima v bodě $1/2$. Globální maximum je

$$f(1/2) = \sqrt{5}.$$

(e) Funkce je spojitá. Z limit v $\pm\infty$ a průběhu funkce plyne, že obor hodnot je $(-1, \sqrt{5}]$.

(f) Graf na intervalu $[-10, 10]$ najdete na https://www.wolframalpha.com, zadáte-li

plot Divide[$(x + 2)$, square root of $(x^2 + 1)$] from -10 to 10

□

Příklad. 3. [6 bodů] Pomocí vhodné substituce spočítejte

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Udělejte zkoušku, že jste počítali dobře.

Řešení. Definiční obor funkce určené k integraci je $(-\infty, 1)$. Použijeme substituci

$$t = \sqrt{1-x}, \quad \text{kde } t \in (0, \infty).$$

[1 bod] Odtud

$$x = 1 - t^2, \quad dx = -2t\,dt.$$

[1 bod] Nyní počítáme podle věty o substituci

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{1-t^2}{t}(-2t)\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + c =$$
$$= \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2} + c$$

[2 body] Spočítáme derivaci funkce $F(x) = \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2} + c$:

$$F'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(1-x)^{1/2} \cdot (-1) - 2 \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} \cdot (-1) = (1-x)^{-1/2} - (1-x)^{1/2} =$$
$$= \frac{1-(1-x)}{\sqrt{1-x}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}}.$$

[2 body]
Jiná substituce Můžeme použít i jinou substituci

$$t = 1-x, \quad \text{kde } t \in (0, \infty).$$

[1 bod] Odtud

$$x = 1-t, \quad dx = -dt.$$

[1 bod] Nyní počítáme podle věty o substituci

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\, dt = \int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\, dt = \frac{2}{3} t^(3/2) - 2t^{1/2} + c =$$
$$= \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2} + c$$

[2 body] □

Příklad. 4. [6 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$2(1+\mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x$$

s počáteční podmínkou

$$y(0) = -2.$$

Řešení. Jde o rovnici se separovanými proměnnými. Proto ji zapíšeme takto

$$2y(x)y'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$$

provedeme integraci podle proměnné x:

$$\int 2y(x)y'(x)\, dx = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} dx$$
$$\int 2y\, dy = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} dx, \quad \text{provedeme substituci } t = \mathrm{e}^x,$$
$$y^2 = \int \frac{dt}{1+t}$$
$$y^2 = \ln|1+t| + c = \ln(1+\mathrm{e}^x) + c$$

[3 body] Proto

$$y(x) = \pm\sqrt{\ln(1+\mathrm{e}^x) + c},$$

přitom funkce $y(x)$ je definována pro x splňující nerovnost $\ln(1+\mathrm{e}^x) \geq c$. [1 bod]

Má-li být $y(0) = -2$ musíme volit znaménko minus a musí být

$$y^2(0) = 4 = \ln(1+\mathrm{e}^0) + c.$$

Odtud
$$c = 4 - \ln 2.$$
[1 bod] Hledané řešení je
$$y(x) = -\sqrt{\ln(1 + \mathrm{e}^x) + 4 - \ln 2}.$$
[1 bod] □