B. Zkouška z M1035, podzim 2021

Příklad. 1. [6 bodů] Spočítejte

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$,

c) derivaci funkce $f(x) = \log_5 x$,

d) všechny primitivní funkce k funkci $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

e) objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 2]$ kolem osy x,

f) všechna řešení diferenciální rovnice $y' = 0,4x$.

Řešení. Za každou úlohu je jeden bod.

(a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(b) Podle l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{\frac{1}{1+x}} = 2.$$

(c) Protože $f(x) = \log_5 x = \dfrac{\ln x}{\ln 5}$ je

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 5}.$$

(d) $\displaystyle\int g(x)\, dx = \arcsin x + c.$

(e) Pomocí integrálu je objem

$$V = \pi \int_0^2 f^2(x)\, dx = \pi \int_0^2 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

(f) $y(x) = 0,2x^2 + c$, kde $c \in R$.

□

Příklad. 2. [6 bodů] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{3x+4}{x^2+1}.$$

a) Najděte limity v krajních bodech definičního oboru.

b) Spočítejte derivaci.

c) Zjistěte, kde je funkce rostoucí na kde klesající.

d) Najděte lokální a globální extrémy funkce.

e) Najděte obor hodnot.

f) Nakreslete graf funkce na intervalu $[-10, 10]$.

Řešení. Za každou podúlohu 1 bod.

(a) Definiční obor je $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+4}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

(b)

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1)-(3x+4)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2} = $$
$$= \frac{(x+3)(1-3x)}{(x^2+1)^2}.$$

(c) Na $(-\infty, -3)$ je funkce klesající, neboť $f'(x) < 0$. Na $(-3, 1/3)$ je funkce rostoucí, neboť $f'(x) > 0$ a na $(1/3, \infty)$ je funkce klesající, neboť $f'(x) < 0$.

(d) Funkce nabývá globálního minima v bodě -3, jeho hodnota je

$$f(-3) = -\frac{1}{2},$$

a globálního maxima v bodě $-1/3$, jeho hodnota je

$$f(1/3) = \frac{9}{2}.$$

(e) Funkce je spojitá. Z limit v $\pm\infty$ a průběhu funkce plyne, že obor hodnot je

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right].$$

(f) Graf na intervalu $[-10, 10]$ najdete na https://www.wolframalpha.com, zadáte-li
plot Divide[$(3x+4)$, (x^2+1)] from -10 to 10

□

Příklad. 3. [6 bodů] Pomocí rozkladu na parciální zlomky spočítejte

$$\int \frac{5x^2-2x+1}{4x^3-8x^2+x-2}dx.$$

Udělejte zkoušku, že jste počítali dobře.

Řešení. Rozklad na parciální zlomky je

$$\frac{5x^2-2x+1}{4x^3-8x^2+x-2} = \frac{x}{4x^2+1} + \frac{1}{x-2}.$$

[2 body] Odtud

$$\int \frac{5x^2-2x+1}{4x^3-8x^2+x-2}dx = \int \frac{x}{4x^2+1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{t}dt + \ln(x-2) =$$
$$= \frac{1}{8}\ln t + \ln(x-2) + c = \frac{1}{8}\ln(4x^2+1) + \ln(x-2) + c$$

Použili jsme substituci $t = 4x^2+1$, $dt = 8x\,dx$. [2 body]

Spočítáme derivaci funkce $F(x) = \frac{1}{8}\ln(4x^2+1) + \ln(x-2) + c$:

$$F'(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4x^2+1} \cdot (8x) + \frac{1}{x-2} = \frac{x}{4x^2+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{5x^2-2x+1}{4x^3-8x^2+x-2}.$$

[2 body] □

Příklad. 4. [6 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$xy' = y^2 - y$$

s počáteční podmínkou

$$y(1) = -2.$$

Návod. Při řešení využijte toho, že každé reálné číslo c lze psát jako $c = \ln k$ pro nějaké $k > 0$. □

Řešení. Jde o rovnici se separovanými proměnnými. Proto ji zapíšeme takto

$$\frac{y'(x)}{y^2(x) - y(x)} = \frac{1}{x}$$

provedeme integraci podle proměnné x:

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)-y(x)}\, dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1)}{y^2-y}\, dy = \int \frac{1}{x} dx, \qquad \text{rozložíme na parciální zlomky ,}$$

$$\int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x} dx,$$

$$\ln(y-1) - \ln y = \ln x + c = \ln x + \ln k,$$

$$\ln \frac{y-1}{y} = \ln kx$$

[3 body] Proto

$$\frac{y-1}{y} = kx,$$

odtud

$$y(x) = \frac{1}{1-kx}.$$

[1 bod]

Má-li být $y(1) = -2$ musí být

$$y(1) = -2 = \frac{1}{1-kx}.$$

Odtud $k = \frac{3}{2}$. [1 bod] Hledané řešení je

$$y(x) = \frac{2}{2-3x}.$$

[1 bod] □