C. Zkouška z M1035, podzim 2021

Příklad. 1. [6 bodů] Spočítejte

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2+x-6}$,

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$,

c) derivaci funkce $f(x) = \arctan x$,

d) všechny primitivní funkce k funkci $g(x) = \dfrac{1}{2x^2}$,

e) obsah množiny $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [1,2],\ 0 \le y \le x^3\}$,

f) všechna řešení diferenciální rovnice $y' = 2022$.

Řešení. Za každou úlohu je jeden bod.

(a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}.$$

(b) Podle l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

(c)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(d) $\displaystyle\int g(x)\, dx = -\frac{1}{2x} + c.$

(e) Pomocí integrálu je obsah

$$S = \int_1^2 x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

(f) $y(x) = 2022x + c$, kde $c \in R$.

$\square$

Příklad. 2. [6 bodů] Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}.$$

a) Napište definiční obor a najděte limity, případně limity zleva a zprava v krajních bodech definičního oboru.

b) Spočítejte derivaci.

c) Zjistěte, na kterých intervalech je funkce rostoucí a na kterých klesající.

d) Najděte lokální a globální extrémy funkce.

e) Najděte obor hodnot.

f) Nakreslete graf funkce na intervalu $[-10, 10]$.

Řešení. Za každou podúlohu 1 bod.

(a) Definiční obor je $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+5}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \infty,$$

$$\lim_{x\to-2_-} \frac{x^2+5}{x+2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-2_+} \frac{x^2+5}{x+2} = \infty.$$

(b)

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2+5)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = \frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}.$$

(c) Derivace je rovna 0 v bodech -5 a 1. Podle znaménka derivace zjistíme, že na intervalu $(-\infty, -5)$ je funkce rostoucí, na intervalu $(-5, -2)$ je klesající, na intervalu $(-2, 1)$ je klesající a na intervalu $(1, \infty)$ rostoucí.

(d) Funkce nabývá pouze lokálního maxima v bodě -5, jeho hodnota je

$$f(-5) = -10,$$

a pouze lokálního minima v bodě 1, jeho hodnota je

$$f(1) = 2.$$

(e) Funkce je spojitá. Z limit a průběhu funkce plyne, že obor hodnot je

$$H(f) = (-\infty, -10] \cup [2, \infty).$$

(f) Graf na intervalu $[-10, 10]$ najdete na https://www.wolframalpha.com, zadáte-li

plot Divide[(x^2+5), $(x+2)$] from -10 to 10

□

Příklad. 3. [6 bodů] Pomocí integrace per partes spočítejte všechny primitivní funkce F k funkci

$$f(x) = (3x^2+2x)\,\mathrm{e}^x\,.$$

[4 body]. Mezi nimi najděte tu, pro kterou platí $F(1) = 2022$. [2 body]

Řešení. Dvakrát použijeme pravidlo per partes, postupně dostaneme

$$\int (3x^2+2x)\,\mathrm{e}^x\ dx = \int (3x^2+2x)(\mathrm{e}^x)'\,dx = (3x^2+2x)\,\mathrm{e}^x - \int (6x+2)\,\mathrm{e}^x\ dx$$

$$= (3x^2x)\,\mathrm{e}^x - (6x+2)\,\mathrm{e}^x + \int 6\,\mathrm{e}^x\ dx = (3x^2+2x)\,\mathrm{e}^x - (6x+2)\,\mathrm{e}^x + 6\,\mathrm{e}^x + c$$

$$= (3x^2-4x+4)\,\mathrm{e}^x + c$$

[4 body]

Po primitivní funkci F požadujeme

$$F(1) = (3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4)\,\mathrm{e}^1 + c = 3\,\mathrm{e} + c = 2022.$$

Tedy

$$c = 2022 - 3\,\mathrm{e}\,.$$

Hledaná funkce je

$$F(x) = (3x^2 - 4x + 4)\,\mathrm{e}^x + 2022 - 3\,\mathrm{e}\,.$$

[2 body] □

Příklad. 4. [6 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = x^2 y$$

s počáteční podmínkou

$$y(0) = -3.$$

Řešení. Jde o rovnici se separovanými proměnnými. Proto ji zapíšeme takto

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x^2$$

a provedeme integraci podle proměnné x:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int x^2\,dx$$

$$\int \frac{1)}{y}\,dy = \int x^2\,dx,$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + c,$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+c},$$

$$|y| = \mathrm{e}^c\ \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}},$$

kde $\mathrm{e}^c \in (0, \infty)$. [3 body] Proto

$$y(x) = k\,\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}},$$

kde $k \in \mathbb{R}$. [1 bod]

Má-li být $y(1) = -3$ musí být

$$y(0) = k\,\mathrm{e}^0 = -3.$$

Odtud $k = -3$. [1 bod] Hledané řešení je

$$y(x) = -3\,\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}\,.$$

[1 bod] □