Cvičení 9-Integrál, parciální zlomky a speciální substituční metody

9. listopadu 2021

1 Definice a užitečné vztahy

Definice a základní pravidla

Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f, jestliže platí $F'(x) = f(x)$, integrál je definovaný tak, že funkci f přiřadí její funkci primitivní.

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$$

Pozor tato primitivní funkce není určtena jednoznačně, protože $F(x) + C$ je také primitivní funkce k funkci $f(x)$, protože $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$
Základní vzorce a metody

$$\int f(x) \pm g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x, \quad \int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

Metoda per partes: $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$
Substituční metoda: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} g(x) = u \\ g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{vmatrix} = \int f(u)\mathrm{d}u$

2 Tabulkové integrály

Zde si budeme psát základní integrály na které přijdeme buď z definice, z vlastností derivací nebo výpočtem z výše uvedených příkladů. Jedná se tedy o celkový seznam a ne všechny integrály jsou "tabulkové".

- $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad$ pro $\alpha \neq 1$
- $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + C$
- $\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C$
- $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln \cos x + C$
- $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \sinh^{-1} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$
- $\int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \tanh^{-1} x + C = \frac{1}{2} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \cosh^{-1} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$
- $\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$
- $\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$
- $\int \frac{1}{\sinh^2 x} \mathrm{d}x = -\coth x + C$
- $\int \frac{1}{\cosh^2 x} \mathrm{d}x = \tanh x + C$

3 Složitější příklady: náročnější substituce nebo kombinace substituce a per partes

Integrály z minulého cvičení budou složit jako motivační příklady.

1.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} \mathrm{d}x$$

2.
$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$$

3.
$$\int \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

4.
$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x$$

5.
$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x$$

6.
$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}$$

7.
$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

8.
$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

9.
$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

10.
$$\int x \arcsin x^2 \mathrm{d}x$$

11.
$$\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}x$$

12.
$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$$

13.
$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

14.
$$\int \frac{x^2}{9-x^2}\mathrm{d}x$$

Chci abyste si odnesli následující poučení

Goniometrické a hyperbolické substituce

- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{a^2 - x^2}$, hodí se substituce $x = a \sin t$
- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{x^2 - a^2}$, hodí se substituce $x = \frac{a}{\sin t}$
- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{a^2 + x^2}$, hodí se substituce $x = a \tan t$

Občas se tyto substituce dají použít i bez přítomnosti odmocnin, viz příklad 13. Častěji budou ale užitečnější hyperbolické substituce.

- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{a^2 + x^2}$, hodí se substituce $x = a \sinh t$
- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{x^2 - a^2}$, hodí se substituce $x = a \cosh t$

4 Integrál z racionálních lomených funkcí

Rozklad na parciální zlomky

Doteď jsme byli schopni přijít na následující integrály.

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{kde P(x) je libovolný polynom}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2\arctan\frac{2ax+b}{D}}{D}, \quad \text{kde} \quad D = \sqrt{4ac-b^2}, \quad \text{pro} \quad b^2-ac<0$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{D}\frac{\ln(1-\frac{2ax-b}{D})}{\ln(1+\frac{2ax-b}{D})}, \quad \text{kde} \quad D = \sqrt{b^2-4ac}, \quad \text{pro} \quad b^2-4ac>0$$

Vlastně známe ještě obecnější viz. sbírka docenta Hasila. Můžeme, ale vytvořit metodu ke spočítání obecného integrálu podílu dvou polynomů. $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Obecný postup

1. Rozložíme polynom $Q(x)$ do jeho kořenů, tedy $Q(x) = (x-x_0)^{n_0}(x-x_1)^{n_1}\cdots$, ale jsou li kořeny komplexní napíšeme raději $(x^2+bx+c)^n$, kde n, $n_0, \ldots$ určují násobnosti kořenů.

2. Kořeny dle násobnosti rozložíme.

$$\frac{1}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$$\frac{1}{(x^2+bx+c)^n} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

3. Určíme neznáme koeficienty porovnáním výrazů.

1. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-5x+7}$$

2. $$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$$

3. $$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

4. $$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

5.
$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\,\mathrm{d}x$$

6.
$$\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$$

7.
$$\int \frac{x^3 + x}{(x^2 - 1)(x^2 - 2)}\,\mathrm{d}x$$

8.
$$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 2}\,\mathrm{d}x$$

9.
$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,\mathrm{d}x$$

10.
$$\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x}\,\mathrm{d}x$$

11.
$$\int \frac{x^8}{x^8 - 1}\,\mathrm{d}x$$

12.
$$\int \frac{1}{(x^2 - 4x + 5)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

13.
$$\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 3)}\,\mathrm{d}x$$

14.
$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1}\,\mathrm{d}x$$

15.
$$\int \frac{x^{10}}{x^2 + x - 2}\,\mathrm{d}x$$

5 Integrály s odmocninou

Speciální substituce

- Integrály kde se vyskytují odmocniny z $\sqrt{x}$ různých řádů, $\sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, \dots, \sqrt[r_k]{x}$ řešíme substitucí $t^n = x$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $r_1, \dots, r_k$.
- Integrály kde se vyskytuje $\sqrt[r]{ax+b}$, řešíme substitucí $t^r = ax + b$
- Integrály kde se vyskytují odmocniny v této podobě $\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, kde $ad - bc \neq 0$, řešíme substitucí $t^r = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, tímto integrál převedeme na racionální lomenou funkci.
- Eulerova substituce viz. skripta.

1. $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
2. $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
3. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$
4. $$\int \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x$$
5. $$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x$$
6. $$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$
7. $$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$$
8. $$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$$
9. $$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x$$
10. $$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

6 Binomický integrál

Speciální substituce

Binomický integrál je integrál typu

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, \mathrm{d}x, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}$$

1. Jestliže $p \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $x = t^s$, kde s je společný jmenovatel m a n;
2. jestliže $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $(a + bx)^n = t^s$, kde s je jmenovatel p;
3. jestliže $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $ax^{-n} + b = t^s$, kde s je jmenovatel p.

1.
$$\int \sqrt[3]{x} \left(7 + 5x^4\right)^2 \, \mathrm{d}x$$

2.
$$\int \frac{(2 + 5x)^3}{\sqrt[4]{x^3}} \, \mathrm{d}x$$

3.
$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

4.
$$\int x \sqrt{2 - 3\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

5.
$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{1 + x^4}} \, \mathrm{d}x$$

6.
$$\int \frac{1}{x^4 \sqrt{1 + x^2}} \, \mathrm{d}x$$

7 Goniometrické integrály

Speciální substituce

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ řešíme pomocí substituce

1. jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \sin x$;
2. jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \cos x$;
3. jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \tan x$;
4. jestliže nenastane ani jedna z předchozích možností, použijeme k řešení tzv.univerzální substituci:

$$t = \tan\frac{x}{2} \to x = 2\arctan t \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

1. $$\int \sin^n x \cos^m x\,\mathrm{d}x, \quad \text{pouze si rozmyslete jakou substituci pouzijete}$$

2. $$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$$

3. $$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

4. $$\int \cot^3 x + \cot^4 x\,\mathrm{d}x$$

5. $$\int \frac{1}{2 - \cos x}\,\mathrm{d}x$$

6. $$\int \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$$

7. $$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x$$

8. $$\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,\mathrm{d}x$$

9. $$\int \frac{\cos 2x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x$$

10.
$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$

11.
$$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

12.
$$\int \frac{1}{1+\sin(2x)}\,\mathrm{d}x$$

8 Určitý integrál a základní aplikace

Definice

Pro integrovatelnou funkci $f(x)$ je určitý integrál

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Nevlastní integrál

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Na několika základních příkladech si ukážeme jak fungují nové aspekty oproti neurčitému integrálu.

1.
$$\int\limits_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^0 x\,\mathrm{d}x$$

2.
$$\int\limits_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$$

3.
$$\int\limits_0^1 x(x^2-1)^3\,\mathrm{d}x$$

4. Dokažte substitucí, že $\int\limits_{-a}^{a} x\,\mathrm{d}x = 0$

9 Složité nebo zajímavé příklady