Cvičení 9-Integrál, parciální zlomky a speciální substituční metody

9. listopadu 2021

1 Definice a užitečné vztahy

Definice a základní pravidla

Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f, jestliže platí $F'(x) = f(x)$, integrál je definovaný tak, že funkci f přiřadí její funkci primitivní.

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$$

Pozor tato primitivní funkce není určtena jednoznačně, protože $F(x) + C$ je také primitivní funkce k funkci $f(x)$, protože $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$
Základní vzorce a metody

$$\int f(x) \pm g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x, \quad \int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

Metoda per partes: $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$
Substituční metoda: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} g(x) = u \\ g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{vmatrix} = \int f(u)\mathrm{d}u$

2 Tabulkové integrály

Zde si budeme psát základní integrály na které přijdeme buď z definice, z vlastností derivací nebo výpočtem z výše uvedených příkladů. Jedná se tedy o celkový seznam a ne všechny integrály jsou "tabulkové".

- $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad$ pro $\alpha \neq 1$
- $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + C$
- $\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C$
- $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln \cos x + C$
- $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \sinh^{-1} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$
- $\int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \tanh^{-1} x + C = \frac{1}{2} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \cosh^{-1} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$
- $\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$
- $\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$
- $\int \frac{1}{\sinh^2 x} \mathrm{d}x = -\coth x + C$
- $\int \frac{1}{\cosh^2 x} \mathrm{d}x = \tanh x + C$

3 Složitější příklady: náročnější substituce nebo kombinace substituce a per partes

Integrály z minulého cvičení budou složit jako motivační příklady.

1. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} \mathrm{d}x$$

2. $$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$$

3.
$$\int \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

4.
$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x$$

5.
$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x$$

6.
$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}$$

7.
$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

8.
$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

9.
$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

10.
$$\int x \arcsin x^2 \mathrm{d}x$$

11.
$$\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}x$$

12.
$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$$

13.
$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

14.
$$\int \frac{x^2}{9-x^2}\mathrm{d}x$$

Chci abyste si odnesli následující poučení

Goniometrické a hyperbolické substituce

- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{a^2 - x^2}$, hodí se substituce $x = a \sin t$
- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{x^2 - a^2}$, hodí se substituce $x = \frac{a}{\sin t}$
- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{a^2 + x^2}$, hodí se substituce $x = a \tan t$

Občas se tyto substituce dají použít i bez přítomnosti odmocnin, viz příklad 13. Častěji budou ale užitečnější hyperbolické substituce.

- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{a^2 + x^2}$, hodí se substituce $x = a \sinh t$
- Obsahuje-li integrál výraz $\sqrt{x^2 - a^2}$, hodí se substituce $x = a \cosh t$

4 Integrál z racionálních lomených funkcí

Rozklad na parciální zlomky

Doteď jsme byli schopni přijít na následující integrály.

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{kde P(x) je libovolný polynom}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2\arctan\frac{2ax+b}{D}}{D}, \quad \text{kde} \quad D = \sqrt{4ac-b^2}, \quad \text{pro} \quad b^2-ac<0$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{D}\frac{\ln(1-\frac{2ax-b}{D})}{\ln(1+\frac{2ax-b}{D})}, \quad \text{kde} \quad D = \sqrt{b^2-4ac}, \quad \text{pro} \quad b^2-4ac>0$$

Vlastně známe ještě obecnější viz. sbírka docenta Hasila. Můžeme, ale vytvořit metodu ke spočítání obecného integrálu podílu dvou polynomů. $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Obecný postup

1. Rozložíme polynom $Q(x)$ do jeho kořenů, tedy $Q(x) = (x-x_0)^{n_0}(x-x_1)^{n_1}\cdots$, ale jsou li kořeny komplexní napíšeme raději $(x^2+bx+c)^n$, kde n, $n_0, \ldots$ určují násobnosti kořenů.

2. Kořeny dle násobnosti rozložíme.

$$\frac{1}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$$\frac{1}{(x^2+bx+c)^n} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

3. Určíme neznáme koeficienty porovnáním výrazů.

1.
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-5x+7}$$

2.
$$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$$

3.
$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

4.
$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

5.
$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\,\mathrm{d}x$$

6.
$$\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$$

7.
$$\int \frac{x^3 + x}{(x^2 - 1)(x^2 - 2)}\,\mathrm{d}x$$

8.
$$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x + 2}\,\mathrm{d}x$$

9.
$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,\mathrm{d}x$$

10.
$$\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x}\,\mathrm{d}x$$

11.
$$\int \frac{x^8}{x^8 - 1}\,\mathrm{d}x$$

12.
$$\int \frac{1}{(x^2 - 4x + 5)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

13.
$$\int \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 3)}\,\mathrm{d}x$$

14.
$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - x - 1}\,\mathrm{d}x$$

15.
$$\int \frac{x^{10}}{x^2 + x - 2}\,\mathrm{d}x$$

5 Integrály s odmocninou

Speciální substituce

- Integrály kde se vyskytují odmocniny z $\sqrt{x}$ různých řádů, $\sqrt[r_1]{x}$, $\sqrt[r_2]{x}, \ldots,$ $\sqrt[r_k]{x}$ řešíme substitucí $t^n = x$, kde n je nejmenší společný násobek čísel $r_1, \ldots, r_k$.
- Integrály kde se vyskytuje $\sqrt[r]{ax+b}$, řešíme substitucí $t^r = ax + b$
- Integrály kde se vyskytují odmocniny v této podobě $\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, kde $ad - bc \neq 0$, řešíme substitucí $t^r = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, tímto integrál převedeme na racionální lomenou funkci.
- Eulerova substituce viz. skripta.

1. $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$$
2. $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$$
3. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, \mathrm{d}x$$
4. $$\int \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\, \mathrm{d}x$$
5. $$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\, \mathrm{d}x$$
6. $$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\, \mathrm{d}x$$
7. $$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\, \mathrm{d}x$$
8. $$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, \mathrm{d}x$$
9. $$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\, \mathrm{d}x$$
10. $$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\, \mathrm{d}x$$

6 Binomický integrál

Speciální substituce

Binomický integrál je integrál typu

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p \, \mathrm{d}x, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}$$

1. Jestliže $p \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $x = t^s$, kde s je společný jmenovatel m a n;
2. jestliže $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $(a + bx)^n = t^s$, kde s je jmenovatel p;
3. jestliže $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, volíme substituci $ax^{-n} + b = t^s$, kde s je jmenovatel p.

1. $$\int \sqrt[3]{x} \left(7 + 5x^4\right)^2 \, \mathrm{d}x$$
2. $$\int \frac{(2 + 5x)^3}{\sqrt[4]{x^3}} \, \mathrm{d}x$$
3. $$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$
4. $$\int x \sqrt{2 - 3\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$
5. $$\int \frac{1}{\sqrt[4]{1 + x^4}} \, \mathrm{d}x$$
6. $$\int \frac{1}{x^4 \sqrt{1 + x^2}} \, \mathrm{d}x$$

7 Goniometrické integrály

Speciální substituce

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ řešíme pomocí substituce

1. jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \sin x$;
2. jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \cos x$;
3. jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \tan x$;
4. jestliže nenastane ani jedna z předchozích možností, použijeme k řešení tzv.univerzální substituci:

$$t = \tan\frac{x}{2} \to x = 2\arctan t \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

1. $$\int \sin^n x \cos^m x\,\mathrm{d}x, \quad \text{pouze si rozmyslete jakou substituci pouzijete}$$
2. $$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$$
3. $$\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$
4. $$\int \cot^3 x+\cot^4 x\,\mathrm{d}x$$
5. $$\int \frac{1}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x$$
6. $$\int \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$$
7. $$\int \frac{\sin x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x$$
8. $$\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$$
9. $$\int \frac{\cos 2x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

10.
$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$

11.
$$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

12.
$$\int \frac{1}{1+\sin(2x)}\,\mathrm{d}x$$

8 Určitý integrál a základní aplikace

Definice

Pro integrovatelnou funkci $f(x)$ je určitý integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Nevlastní integrál

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Na několika základních příkladech si ukážeme jak fungují nové aspekty oproti neurčitému integrálu.

1.
$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 x\,\mathrm{d}x$$

2.
$$\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$$

3.
$$\int_0^1 x(x^2-1)^3\,\mathrm{d}x$$

4. Dokažte substitucí, že $\int\limits_{-a}^{a} x\,\mathrm{d}x = 0$

9 Složité nebo zajímavé příklady

10 Řešení

10.1 Integrál z racionálních lomených funkcí - řešení

1.
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-5x+7} = \int \frac{1}{2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right]}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} u = x-\frac{5}{4} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \end{array}\right| = \int \frac{1}{2\left[u^2+\frac{31}{16}\right]}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{31}{16}}}\arctan\frac{u}{\sqrt{\frac{31}{16}}} + C = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{31}{16}}}\arctan\frac{x-\frac{5}{4}}{\sqrt{\frac{31}{16}}} + C = \frac{2}{\sqrt{31}}\arctan\frac{4x-5}{\sqrt{31}} + C$$

Kde jsme použili výsledek integrálu $\int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$, který jsme spočítali v minulém cvičení.

2.
$$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x =$$

Na chvíli zapomeneme na první příspěvek a počítáme pouze druhý integrál.

$$= \left|\begin{array}{c} u = x-\frac{1}{2} \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array}\right| = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}u = \left|\begin{array}{c} u = \sqrt{\frac{5}{4}}\tanh v \\ \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{\cosh^2 u}\mathrm{d}v \end{array}\right| = -\frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{2}\int \frac{1}{\frac{5}{4}\left(\tanh^2 v-1\right)}\frac{1}{\cosh^2 v}\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\int 1\,\mathrm{d}v = \frac{\sqrt{5}}{5}v + C$$

Celkově tedy

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| + \frac{\sqrt{5}}{5}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C$$

3.
$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Zde máme první pořádný příklad na parciální zlomky. Jmenovatel už je rozložen na kořeny, takže můžeme počítat.

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \rightarrow$$

Převedeme zlomky na společný jmenovatel a porovnáme s původním zlomkem.

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

Roznásobíme a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin x

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad A+B=0 \\ x^1 &: \quad 2A+C=1 \\ x^0 &: \quad A-B-C=0 \end{aligned}$$

Soustavu jednoduše vyřešíme jako $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{2}$ a dosadíme zpátky do integrálu.

$$\int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+C$$

U ostatních budeme postupovat stejným způsobem, akorát v řešení již nebudu psát mezikrok kde se součet zlomků převede na společný jmenovatel, rovnou budu psát rovnice pro koeficienty.

4.

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} x^1 &: \quad A+B=0 \\ x^0 &: \quad A-B=1 \end{aligned}$$

$$A=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)+C$$

5.

$$\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x\,(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad A+B=0 \\ x^1 &: \quad -2A-B+C=0 \\ x^0 &: \quad A=1 \end{aligned}$$

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=1$$

$$= \int \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

6.

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad A+B=1 \\ x^2 &: \quad -3A-2B+C=0 \\ x^1 &: \quad 3A+B-C+D=0 \\ x^0 &: \quad -A=1 \end{aligned}$$

$$A=-1,\quad B=2,\quad C=1,\quad D=2$$
$$\int \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x=\int -\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C$$

7.
$$\int \frac{x^3+x}{(x^2-1)(x^2-2)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{x^3+x}{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\,\mathrm{d}x=\int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-\sqrt{2}}+\frac{D}{x+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$$
$$\begin{aligned} x^3 &: \quad A+B+C+D=1\\ x^2 &: \quad A-B+\sqrt{2}C-\sqrt{2}D=0\\ x^1 &: \quad -2A-2B-C-D=1\\ x^0 &: \quad -2A+2B-\sqrt{2}C+\sqrt{2}D=0 \end{aligned}$$
$$A=-1,\quad B=-1,\quad C=\frac{3}{2},\quad D=\frac{3}{2}$$
$$\int \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-\sqrt{2}}+\frac{D}{x+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x=\int -\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2(x-\sqrt{2})}+\frac{3}{2(x+\sqrt{2})}\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\ln|x-1|-\ln|x+1|+\frac{3}{2}\ln|x-\sqrt{2}|+\frac{3}{2}\ln|x+\sqrt{2}|+C$$

Dostáváme se k druhému typu příkladů, kde prvně musíme zlomek upravit tak abychom dostali do čitatele polynom menšího řádu, než je ve jmenovateli. Dostaneme se tím na typ příkladu, který jsme zrovna teď počítali.

8.
$$\int \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{x^2+x+2+2x}{x^2+x+2}\mathrm{d}x=\int 1+\frac{2x}{x^2+x+2}\mathrm{d}x=x+\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x=$$
$$=x+\ln|x^2+x+2|-\int \frac{1}{x^2+x+2}\mathrm{d}x=x+\ln|x^2+x+2|+\frac{2\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}}+C$$

9.
$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{x^3-5x^2+6x+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x=\int 1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x=$$
$$=x+\int \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\mathrm{d}x$$
$$\begin{aligned} x^2 &: \quad A+B+C=5\\ x^1 &: \quad -5A-3B-2C=-6\\ x^0 &: \quad 6A=1 \end{aligned}$$
$$A=\frac{1}{6},\quad B=-\frac{9}{2},\quad C=\frac{28}{3}$$
$$x+\int \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\mathrm{d}x=x+\int \frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}\,\mathrm{d}x=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C$$

10.

$$\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5\left(x^3-5x^2+4x+5x^2-4x\right)+2}{x^3-5x^2+4x}\,\mathrm{d}x = \int 5{+}5\frac{5x^2-4x+\frac{2}{5}}{x(x-1)(x-4)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 5x + 5\int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad A+B+C=5 \\ x^1 &: \quad -5A-4B-1C=-4 \\ x^0 &: \quad 4A=\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$A=\frac{1}{10}, \quad B=-\frac{7}{15}, \quad C=\frac{161}{30}$$

$$5x+5\int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}\,\mathrm{d}x = 5x + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{7}{3}\ln|x-1| + \frac{161}{6}\ln|x-4| + C$$

11.

$$\int \frac{x^8}{x^8-1}\,\mathrm{d}x$$

Řešené ve sbírce, příklad (357).

Nyní se dostáváme do nové kategorie, kde se vyskytují komplexní kořeny, postup je tedy trochu jiný.

12.

$$\int \frac{1}{(x^2-4x+5)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{x^2-4x+5} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad A+C=0 \\ x^2 &: \quad 4A+B-6C+D=0 \\ x^1 &: \quad 4A-4B+13C-4D=0 \\ x^0 &: \quad 4B-10C+5D=1 \end{aligned}$$

$$A=0 \quad B=-1, \quad C=0, \quad D=1$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2-4x+5}{+}\frac{C}{x-2}{+}\frac{D}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x^2-4x+5}{+}\frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(2{-}x){-}\frac{1}{(x-2)}{+}C$$

13.

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} x^3 &: \quad A+C+D=0 \\ x^2 &: \quad 2A+B+5C+D=0 \\ x^1 &: \quad -3A+2B+8C=1 \\ x^0 &: \quad -3B+6C-2D=0 \end{aligned}$$

$$A = -\frac{1}{5}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{20}, \quad D = \frac{3}{20}$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{x}{5(x^2+2x+2)} + \frac{1}{20(x-1)} + \frac{3}{20(x+3)} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\arctan(x+1) - \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|\right) + \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{3}{20}\ln|x+3| + C$$

Poslední kategorie příkladů je taková, že ve jmenovateli je vyšší mocnina polynomu než v čitateli musíme tedy podělit vícekrát.

14.

$$\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x(x^2-x-1)+3x^2+2x-1}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x = \int x + \frac{3(x^2-x-1)+5x+2}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int 3 + \frac{5x+2}{x^2-x-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{10}\left(\left(25+9\sqrt{5}\right)\ln|-2x+\sqrt{5}+1| + \left(25-9\sqrt{5}\right)\ln|2x+\sqrt{5}-1|\right) + C$$

15.

$$\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

Viz 8. cvičení kolegy Cidlinského ve středu.

10.2 Integrály s odmocninou - řešení

1.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^2 = x \\ 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

2.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^2 = x \\ 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{2t^2}{1+t}\mathrm{d}t = t^2 - 2t + 2\ln|1+t| + C = x - 2\sqrt{x} + 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

3.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^6 = x \\ 6t^5\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^3+t^2}6t^5\mathrm{d}t = \int \frac{6t^3}{t+1}\mathrm{d}t = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

4.

$$\int \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^6 = x \\ 6t^5\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1+t^3+t^2}{t^6+t^5}6t^5\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{1+t^2+t^3}{t+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2t^3 + 6\ln|1+t| + C = 2\sqrt{t} + 6\ln|1+\sqrt[6]{x}| + C$$

Nyní se přesouváme na integrály druhého typu

5.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^2 = x+1 \\ 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{t+1}{t-1} 2t\,\mathrm{d}t = t^2 + 4t + \ln|t-1| + C = x+1+4\sqrt{x+1}+\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$$

6.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$

Zde musíme použít substituci dvakrát viz sbírka příklad (373).

7.

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^6 = x+1 \\ 6t^5\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1-t^3}{1+t^2} 6t^5\,\mathrm{d}t = \int \frac{6t^5}{1+t^2} - \frac{6t^8}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Výsledek je dostupný ve sbírce, příklad (369).

Dostáváme se do třetího typu příkladu a tedy použítí jiné substituce

8.

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{x+1}{x-1} \\ 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

K tomu abychom mohli dosadit musíme vyjádřit jak dx tak $\frac{1}{x}$, pomocí t. To uděláme takto:

$$t^2 = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \to t^2 - 1 = \frac{2}{x-1} \to x - 1 = \frac{2}{t^2-1} \to x = 1 + \frac{2}{t^2-1} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)'\mathrm{d}t = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Tedy můžeme dokončit substituci

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^2 = \frac{x+1}{x-1} \\ 2t\mathrm{d}t = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} t \left(-\frac{4t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t\right) = -\int \frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} =$$

$$= \int -\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 2\arctan t + C =$$

$$= -\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right| + \ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right| - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) + C$$

9.

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^3 = \frac{x+1}{x-1} \\ -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{6t^3}{(t^3-1)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{6t}{t^3-1} + \ln|t^2+t+1| - 2\ln|1-t| + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$$

Kam by se dosadilo za t.

10.

$$\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$$

Viz sbírka příklad (372).

10.3 Binomický integrál - řešení

Některé příklady pouze upravím do tvaru, který by již šel řešit, většina příkladů je k dispozici ve sbírce.

1.

$$\int \sqrt[3]{x}\left(7+5x^4\right)^2 \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} m=\frac{1}{3} \\ n=4 \\ p=2\in\mathbb{Z} \\ x=t^3 \\ \mathrm{d}x=3t^2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int 3t^3(7+5t^{12})^2\,\mathrm{d}t$$

2.

$$\int \frac{(2+5x)^3}{\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} m=-\frac{3}{4} \\ n=1 \\ p=3\in\mathbb{Z} \\ x=t^4 \\ \mathrm{d}x=4t^3\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{(2+5t^4)^3}{t^3}4t^3\,\mathrm{d}t = \int 4(2+5t^4)^3\,\mathrm{d}t$$

3.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} m=-\frac{1}{2} \\ n=\frac{1}{4} \\ p=\frac{1}{3} \\ \frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z} \\ 1+\sqrt[4]{x}=t^3 \\ \mathrm{d}x=?\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Prvně dopočítáme x v závislosti na t a také diferenciál dx.

$$x=\left(t^3-1\right)^4 \to \mathrm{d}x = 3\left(t^3-1\right)^3 3t^2\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme substituci a dostaneme

$$= \int \frac{t}{(t^3-1)^2}9t^2(t^3-1)^3\,\mathrm{d}t = \int 9t^2(t^3-1)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{6}t^6-3t^3+C = \frac{9}{6}(1+\sqrt[4]{x})^2-3(1+\sqrt[4]{x})+C$$

4.

$$\int x\sqrt{2-3\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} m=1 \\ n=\frac{1}{2} \\ p=\frac{1}{2} \\ \frac{m+1}{n}=4\in\mathbb{Z} \\ 2-3\sqrt{x}=t^2 \\ \mathrm{d}x=-\frac{2t}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2-t^2}{\sqrt{3}}t^2\frac{-2t}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int 2t^5-4t^3\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{t^6}{3}-t^4\right)+C = \frac{1}{9}\left(2-3\sqrt{x}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(2-3\sqrt{x}\right)^2 + C$$

5.

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} m=0 \\ n=4 \\ p=-\frac{1}{4} \\ \frac{m+1}{n}+p=0\in\mathbb{Z} \\ 1x^{-4}+1=t^4 \\ 1+x^4=\frac{t^4}{t^4-1} \\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}4t^3\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{\sqrt[4]{t^4-1}}{t}\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}4t^3\,\mathrm{d}t = -\int \frac{t^2}{t^4-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\int \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1| + \arctan t\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\ln|\sqrt[4]{1+x^{-4}}-1| - \ln|\sqrt[4]{1+x^{-4}}+1| + \arctan\sqrt[4]{1+x^{-4}}\right) + C$$

6.

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} m=-4 \\ n=2 \\ p=-\frac{1}{2} \\ \frac{m+1}{n}+p=2\in\mathbb{Z} \\ 1x^{-2}+1=t^2 \\ 1+x^2=\frac{t^2}{t^2-1} \\ \mathrm{d}x=-t\left(\frac{1}{t^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{1}{\frac{1}{(t^2-1)^2}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}t\left(\frac{1}{t^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = -\int t(t^2-1)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C = --\frac{(1+x^{-2})^2}{4} + \frac{1+x^{-2}}{2} + C$$

10.4 Goniometrické integrály - řešení

1.

$$\int \sin^n x\cos^m x\,\mathrm{d}x, \quad \text{pouze si rozmyslete jakou substituci pouzijete}$$

Tento příklad byl rozebraný na přednášce (slide 53 čtvrté prezentace)

2.

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\tan x \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

V integrálu máme $\cos x$ musíme ho tedy vyjádřit pomocí $\tan x$ abychom za substituci mohli dosadit. Z předchozích cvičení víme, že

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \to \cos x = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}}$$

Zde nám stačí vzorec pro $\frac{1}{\cos^2 x}$. Víme tedy jak provést substituci

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\tan x \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int (1+t^2)\,\mathrm{d}t = t + \frac{t^3}{3} + C = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

3.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1-t^2}{1+4t^2+3(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{4+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int 1 - \frac{5}{4+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \frac{5}{2}\arctan\frac{t}{2} + C = \cos x - \frac{5}{2}\arctan\frac{\cos x}{2} + C$$

4.

$$\int \cot^3 x + \cot^4 x\,\mathrm{d}x$$

Tyto integrály je nejlepší spočítat zvlášť

$$\int \cot^3 x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2t^2} - \ln|t| + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C$$

$$\int \cot^4 x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\tan x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

Zde si musíme, ještě vyjádřit $\sin x$ pomocí $\tan x$ a to takto $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$$\int \cot^4 x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\tan x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{(1+t^2)^3}\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^4(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+\arctan t+C =$$

$$= -\frac{1}{3\tan^3 x} + \frac{1}{\tan x} + x + C$$

5.

$$\int \frac{1}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\tan\frac{x}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\frac{2+2t^2-1+t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{1+3t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\arctan\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} + C$$

6.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$$

Toto není příklad racionální funkce, ale i tak ho můžeme vyřešit.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\sqrt{\tan x} \\ \mathrm{d}x = \frac{2t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\frac{2t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t =$$

Dostali jsme se k zajímavé úloze na parciální zlomky. Prvně musíme rozložit $1+t^4$ na kořeny. Na to si pomůžeme trikem. Šlo by to ale také řešit substitucí $t^2 = s$ a poté vyřešením kvadratické rovnice.

$$1+t^4 = 1+2t^2+t^4-2t^2 = (t^2+1)^2-(\sqrt{2}t)^2 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2t}+1)$$

Tedy

$$\int \frac{2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
x^3 &: \quad A + C = 0 \\
x^2 &: \quad -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 0 \\
x^1 &: \quad A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0 \\
x^0 &: \quad B + D = 2
\end{aligned}
$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad B = 1, \quad C = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad D = 1$$

$$\int \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)} + \frac{-t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|t^2+\sqrt{2}t+1| + 2\arctan(\sqrt{2}t+1) - \ln|t^2-\sqrt{2}t+1| - 2\arctan(1-\sqrt{2}t)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|\tan x + \sqrt{2}\sqrt{\tan x}+1| + 2\arctan(\sqrt{2}\sqrt{\tan x}+1) - \ln|\tan x - \sqrt{2}\sqrt{\tan x}+1|$$

$$-2\arctan(1-\sqrt{2}\sqrt{\tan x})\Big)$$

7.

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}}{\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}} - \sqrt{\frac{1}{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Nyní bychom museli upravovat tento výraz, ale lze to dopočítat pomocí způsobů, které jsme se naučili v minulých kapitolách. Lze tento integrál však řešit jednodušeji, prvně použijeme goniometrické vzorce na upravení a dostaneme

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x}{\tan x - 1}\left| \begin{array}{c} t = \tan x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t}{t-1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} + \frac{1-t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln|t^2+1| + \frac{1}{2}\arctan t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\tan x - 1| - \frac{1}{4}\ln|\tan^2 x + 1| + \frac{1}{2}x + C$$

8.

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,\mathrm{d}x$$

Zde je znovu lepší použít goniometrických identit, samozřejmě je také tento příklad možné počítat pomocí substitucí, ale není to nutné.

$$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + \cos(4x)\right), \quad \frac{1}{2}\cos(2x)\left(\cos(2x)+\cos(4x)\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x)\right)$$

Tedy

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(1 + \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x)\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{6}\sin(6x)\right) + C$$

9.

$$\int \frac{\cos 2x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Tento příklad jsme podrobně počítali na cvičení.

10.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)(2t+1-t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int \frac{4t+2}{5(t^2+1)} + \frac{t+2}{5(t^2-t-1)} =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\ln|t^2+1| + \arctan t\right) + \frac{1}{10}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)\ln|-2t+\sqrt{5}+1| - \left(\sqrt{5}-1\right)\ln|2t+\sqrt{5}-1|\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\ln|\tan^2\frac{x}{2}+1| + \arctan\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{10}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)\ln|-2\tan\frac{x}{2}+\sqrt{5}+1| - \right.$$

$$\left. - \left(\sqrt{5}-1\right)\ln|2\tan\frac{x}{2}+\sqrt{5}-1|\right)$$

11.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Zde máme chyták, tento příklad je jen na pozornost a znalost základních goniometrických vzorců.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \tan 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C = -\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C$$

12.

$$\int \frac{1}{1+\sin(2x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+2\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2\frac{t}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+t} + C = -\frac{1}{1+\tan x} + C$$