Cvičení 1-2 opakování středoškolské matematiky

M1100F

Podzim 2021

1 Informace o předmětu a cvičení

- Účast na cvičení není povinná, prezenčka je pouze orientační.
- V ISu a souborech MS teams budete mít k dispozici příklady dělané na cvičení (některé s řešením, některé bez), jiné sbírky příkladů a záznamy cvičení z minulého roku.
- Během semestru se bude psát pět písemek, každá za dva body. Tyto písemky budou na následující témata (elementární funkce, limity, derivace, integrály, diferenciální rovnice).
- K udělení zápočtu a přístupu ke zkoušce potřebujete celkově alespoň 5 bodů.
- Ke zkoušce si berete 5 až 10 bodů, podle úspěšnosti v písemkách. Bližší vysvětlení najdete na doc. Hasil stranky
- Pokud budete mít jakékoliv dotazy, nebo budete chtít konzultaci neváhajte se na mě obrátit.

2 Elementární funkce a jejich vlastnosti

2.1 Polynomy a mnohočleny

Vzorce

$$
\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \text{binomická věta}
\end{aligned}
$$

1. Úprava na čtverec.

   Jedná se o úpravu kvadratického polynomu $ax^2 + bx + c$ do tvaru $A(x - x_0)^2 + B$, se kterým se dá lépe pracovat.

   - Mějme výraz $y = 2x^2 - 12x - 14$, proveďte: úpravu na čtverec, nalezněte minimum/maximum, náčrt grafu, vyřešení kvadratické rovnice y=0.
   - Najděte obecný vzorec pro úpravu na čtverec pro $ax^2 + bx + c$
   - Upravte na čtverec následující výrazy: $x^2 + 4x + 7, -x^2 + 3x + 1, x^2 - 4x + 4$

2. Nerovnice

   - Vyřešte pro která x platí:
$$x^2 + 4x + 7 \geq 3$$
$$-x^2 + 3x + 1 \leq 1$$

   - Vyřešte
$$\frac{(5x-3)(x+4)}{x(6-x)} \leq 0$$

3. Rovnice

   Vyřešte následující rovnice
$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0, \quad x^2 - 4x + 4 = 0, \quad x^2 - 4x + 5 = 0, \quad x^3 - 2x - 1 = 0$$

4. Další příklady

   - Převeďte $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - 2$ na společný jmenovatel a upravte do základního tvaru
   - Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí
$$2x^2 - 12x - 14 < 0, \quad x^2 - 2x - 3 > 0$$

2.2 Mocniny a absolutní hodnoty

Vzorce

$$a^0 = 1, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \quad a^{1/r} = \sqrt[r]{a}$$
$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

1. Rovnice s odmocninou

   Vyřešte následující rovnice
$$\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+7} = -4, \quad \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 1, \quad \sqrt{x-1} = 5 - \sqrt{x+4}$$

   Nezapomeňte provést zkoušku, u rovnic s odmocninou můžete dostat "falešné" řešení.

2. Rovnice s absolutní hodnotou $|8 - 5x| = 5x - 8, \quad |x+1| - |x-3| = 2$

3. Načrtněte grafy funkcí $y = 3\sqrt{x-1} + 2$, $y = 2|x-3| + 1$, $y = \frac{1}{x-1} + 3$ a $y = |\frac{x+1}{x-2}|$

2.3 Logaritmy a exponenciála

Vzorce

$$\log_a x = y \leftrightarrow x = a^y, \quad \log a^b = b \log a, \quad \log(ab) = \log a + \log b$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b, \quad \log_a b = \frac{\log a}{\log b}, \quad \ln x = \log_e x, e = 2.718..$$

Prvně pořádně pochopme definici: $\log_a x = y \leftrightarrow x = a^y$, slovně to znamená, že $\log_a x$ je takové číslo (označme ho y pro které platí $x = a^y$. Tedy se ptáme na co musím umocnit základ a abych dostal x.

1. Vypočítejte tyto základní hodnoty abyste pochopili definici.

$$\log_2 4, \quad \log_3 \frac{1}{3}, \quad \log_4 1, \quad \log_2 \sqrt{8}, \quad \log_{\frac{1}{2}} 2$$

   S použitím výsledků minulého cvičení a definice logaritmu zjistěte co je definiční obor a obor hodnot funkce $y = \log_a x$ a načrtněte její graf. Jak se grafy mění pro různé hodnoty základu a? Najděte pro jaké x platí $y = 0$.

2. Použijte definici a odvoďte následující vztahy (v závorce je nápověda, kterou byste měli použít)

$$\log a^b = b \log a \quad \left((z^a)^b = z^{ab}\right) \tag{1}$$
$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \left(z^a z^b = z^{a+b}\right) \tag{2}$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad \left(\frac{z^a}{z^b} = z^{a-b}\right) \tag{3}$$
$$\log_a b = \frac{\log a}{\log b} \tag{4}$$
$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x \tag{5}$$

   Kdekoliv kde není u logaritmu psán základ znamená, že příslušný vzorec platí pro libovolný základ.

3. Vyřešte rovnice $2^{3x-1} \cdot 4 = 8^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a $\log_{\frac{1}{2}}(2 - x) = -2$

4. Vyřešte rovnice $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$ a $\log_2(x + 7) - \log_2 x = 3$

5. Vyřešte rovnice $x^{\log_7 x^2} = 49x^3$ a $\log x^3 + 2 = \frac{10}{\log x^2}$

2.4 Goniometrické funkce

Vzorce

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

1. Grafy

   Vzpomeňte si co je perioda a frekvence a určete jak se změní když uděláme $y = \sin x \to y = \sin 3x$ nebo $y = \sin x \to y = \sin x + \frac{\pi}{2}$

   Nakreslete grafy funkcí

   - $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1$
   - $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

2. Odečítání hodnot

   Pomocí jednotkové kružnice určete hodnoty následujících výrazů nebo vyřešte rovnice.

$$\sin\frac{\pi}{6}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad \tan\frac{\pi}{2}, \quad \sin x = -1, \quad \tan x = \pm 1$$

3. Základní vzorce

   - Prvně si z definice dokažte vzorec $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dále zjednodušte následující výrazy
   $$\frac{1}{1+\tan x} - \frac{\cot x}{1+\cot x}, \quad \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}}, \quad \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} + \frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$$
   - S použitím vzorce $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ vyjádřete $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ pomocí pouze $\cos(2x)$. Stejně také najděte vzorce pro $\sin\frac{x}{2}$ a $\cos\frac{x}{2}$ pomocí $\cos x$.
   - Vyřešte rovnice $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x \sin 2x$ a $3\cos x + 3 = 4\cos^3 x + 4\cos^2 x$

4. Součtové vzorce

   Další užitečné vzorce jsou

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

   Dokažte následující vzorce

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$
$$\sin(x+y) + \cos(x-y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y)$$
$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\frac{x-y}{2}$$

Pohybující se rovinnou vlnu můžeme poslat jako funkci polohy x a času t.

$$W = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

Jakou roli hrají parametry A, k, ω, ϕ?
Mějme dvě takové vlny, které se liší jen o ϕ

$$W_1 = A\cos(kx - \omega t), \quad W_2 = A\cos(kx - \omega t + \phi),$$

Tyto dvě vlny spolu mohou interferovat, matematicky se jedná o novou vlnu, která vznikne sečtením $W = W_1 + W_2$. Rozepište výraz pro W a zjednodušte. K lepšímu pochopení nově vniklé vlny si zkuste nalézt podmínky pro ϕ při kterých je W maximální (konstruktivní interference) a naopak minimální (destruktivní interference).

Vlny se také dají popisovat pomocí komplexních funkcí jako

$$W = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

Najděte reálnou část výše uvedeného výrazu a porovnejte s reálnou cosinovou vlnou.

2.5 Cyklometrické funkce

Definice

$$\arcsin x = \sin^{-1} x, \quad \arccos x = \cos^{-1} x$$
$$\arctan x = \tan^{-1} x, \quad \mathrm{arccot} x = \cot^{-1} x$$

Prvně najděme definiční obory a obory hodnot těchto funkcí a pak načtrněme jejich grafy.

Dále můžeme dokázat obdobu součtových vzorců

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

Co se později ukáže být velmi užitečné je přijít na to jak vypočítat kombinace goniometrických a cyklometrických funkcí. Spočtěte tyto výrazy

$$\sin(\arccos x), \quad \sin(\arctan x), \quad \tan(\arccos x) \quad \ldots \quad \text{dalsi kombinace}$$

Dokažte, že $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, který vzorec pro normální goniometrické funkce by vám s tímto příkladem pomohl?

2.6 Hyperbolické funkce

Definice

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Tyto funkce byli definovány tak aby platilo $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ověřte si, že toto opravdu platí.

Upravte výraz $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ s použitím hyperbolických funkcí.

3 Definiční obory a parita funkcí

Najděte definiční obory těchto funkcí

$$y = \sqrt{\sin x}, \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad y = \ln x^2 - 3x + 2, \quad y = \sqrt{\frac{x+4}{x-2}}$$
$$y = \ln \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}, \quad y = \frac{\arccos \frac{3x-2}{5}}{2 - \ln x}, \quad y = \arctan \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

Parita funkce je jiné označení pro sudost/lichost funkce. Funkce je sudá platí-li $f(-x) = f(x)$, (př. $y = x^2$), funkce je lichá platí-li $f(-x) = -f(x)$ (př. $y = x^3$) nebo neplatí-li ani jeden z těchto vztahů řekneme, že funkce není ani sudá ani lichá (př. $y = x^2 + x^3$).

Určování parity rozdělíme na dvě části.

Prvně se podíváme na základní funkce, kde parita vyplývá pouze z definice/grafu.

$$\begin{aligned} &x^{2n}, \quad x^{2n+1}, \quad |x|, \\ &\sin x, \quad \cos x, \quad \tan x \\ &\ln x, \quad e^x \\ &\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x \end{aligned}$$

Za druhé se podíváme jak se parita řeší při kombinací funkcí (a to konkrétně, sčítání a odčítání, násobení, mocnění a kompozice funkcí). Určete paritu následujících funkcí.

$$f(x) = \frac{\arccos x}{\tan^3 x}\left(\frac{|x|}{2^{3x} - 2^{-3x}}\right), \quad f(x) = \frac{\arcsin x}{\tan x}\left(\frac{|x^3|}{2^x + 2^{-x}}\right)$$
$$f(x) = \frac{\cos x \sin x \cos(\sin x)}{2^x - 2^{-x}}, \quad f(x) = \frac{\arcsin \sqrt[3]{4x^3 + 5x}}{x^4} \cdot |x|^{\sin^2 x}$$

4 Komplexní čísla

Vzorce
$i^2 = -1$

- Algebraický tvar: $z = a + bi$, kde $\mathcal{R}e(z) = a$ a $\mathcal{I}m(z) = b$ jsou reálná a imaginární část.
- Polární tvar: $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$, díky Eulerově vzorci: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
- Velikost: $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$
- Argument: $\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathcal{R}e(z)}{|z|}$ nebo $\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mathcal{I}m(z)}{|z|}$
- Umocňování $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$

1. Ukažte, že platí
$$\mathcal{R}e(z) = \frac{z + z^*}{2}, \quad \mathcal{I}m(z) = \frac{z - z^*}{2i}$$
2. Nalezněte tvar čísla $z_1 \cdot z_2$, znáte-li tvary komplexních čísel z_1 a z_2
3. Nalezněte řešení následujících rovnic
$$z^2 = i, z^3 = -1, z^6 = 64$$
4. Najděte reálnou a imaginární část, velikost a argument následujícího čísla a také číslo komplexně sdružené.
$$\frac{3i + 2}{2i - 3}$$