Cvičení 12-Diferenciální rovnice 2

4. ledna 2021

1 Rovnice vyšších řádů

Řešení

Stejný princip řešení:
Rovnice typu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2} y' + a_{n-1} y = f(x)$$

Umíme řešit pokud dokážeme najít kořeny charakteristického polynomu.

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1} = 0$$

1. Rozeberte řešení
$$y^{(4)} + ay'' + by = 0$$
Prvně pro $a = 0$, poté pro $a \neq 0$, napište řešení pro konkrétní volbu $a = b = 1$.

2. $$y''' + y'' + y' = \cos x$$

2 Eulerova rovnice

Definice

Je rovnice typu:
$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{x^{n-1}} y' + \frac{a_1}{x^n} y = f(x)$$

Homogenní se řeší, tak že hledáme řešení ve tvaru $y = x^\lambda$ a vyřešíme přidruženou charakteristickou rovnici.
Nehomogenní se řeší stejně a poté hledáme partikulární řešení metodou variace konstant.
Rovnici lze však převést na rovnici s konstantními koeficienty a to substitucí $x = e^t$.

1. Vyřešte rovnici

$$x^2y'' + xy' + y = 1$$

3 Systémy lineárních rovnic

Definice

Zavedeme novou notaci nezávisle proměnná bude nyní t a závislé proměnné (funkce) budou $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. V souladu s fyzikou budeme nyní derivace značit tečkou. V maticové podobě je systém lineárních rovnic tvaru

$$\dot{x} = Ax + b, \quad \dot{x}_i = A_{ij}x^j + b_i$$

Kde druhý zápis je notace používaná ve fyzice. Řešení si ukážeme na příkladech.

1. Ukázkový příklad

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

2. Reálné různé vlastní hodnoty

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= -2x + y \end{aligned}$$

3. Komplexně sdružené vlastní hodnoty

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 5y \\ \dot{y} &= -x - 3y \end{aligned}$$

4. Reálná dvojnásobná vlastní hodnota

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 4y \\ \dot{y} &= -x - 3y \end{aligned}$$

5. Soustava více rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + z \\ \dot{y} &= x + z \\ \dot{z} &= x + y \end{aligned}$$

4 Fyzikální (složitější) příklady

1. Částice v magnetickém poli.

   Proton je umístěn v počátku soustavy souřadnic je v čase $t = 0$ se částice pohybuje rychlostí $\vec{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha, 0)$, v tomto okamžiku zapneme magnetické pole o intenzitě $\vec{B} = (0, 0, B)$, jak se bude částice pohybovat?

2. Jednoduchý model interakce částic.

   Aproximujeme interakci částic jako dva hmotné body spojené pružinkou s tuhostí g, čím blíže jsou částice k sobě tím více se odpuzují, naopak čím jsou dále tím více se přitahují. Jak se bude tato soustava pohybovat? Vyřešte diferenciální rovnice a poté, použijte počáteční podmínky, prvně předpokládáme, že jsou obě částice na začátku v klidu a za druhé máme počáteční podmínku, že jednu částici postrčíme k druhé rychlostí v_0. Jak se úloha změní když provedeme následující úpravu: částici postrčíme silou, kolmou ke spojnici částic.

5 Slovní úlohy na procvičení

1. Najděte křivku, procházející bodem $(3, 2)$, pro nichž každý segment tečny uzavřený osami x, y je rozdělen přesně na polovinu bodem dotyku s křivkou. Viz. Demidovic strana 329 příklad 3.

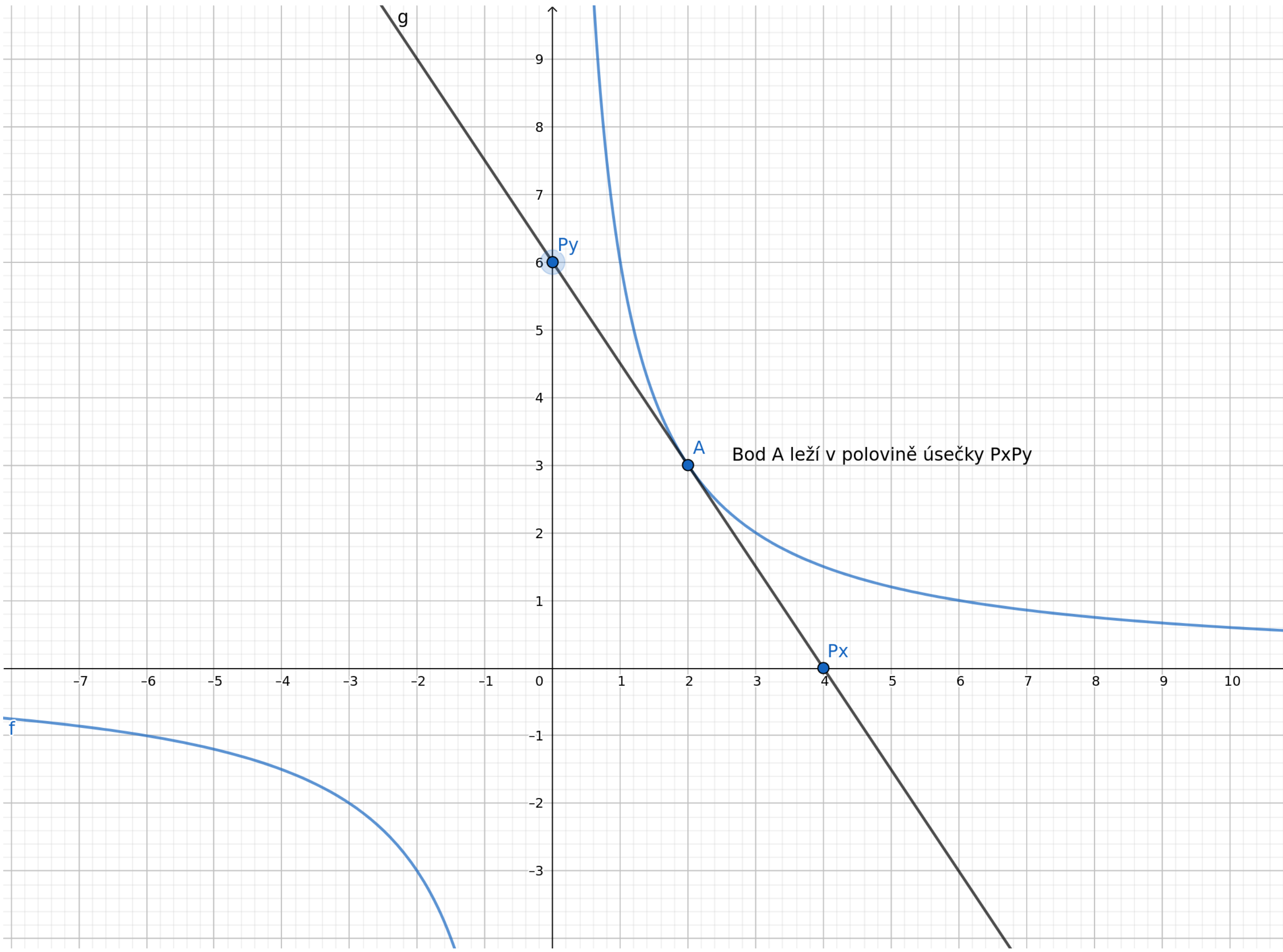
2. Za jaký čas se těleso o teplotě $100°$ zchladí na teplotu $30°$ je-li umístěno do místnosti s pokojovou teplotou $20°$ a všimli jste si, že za 20 minut se těleso zchladilo na $60°$.

3. Z tabulek zjistíte, že radium má poločas rozpadu 1600 let, kolik procent radia se rozpadne za 100 let?

4. Vyskočili jste z letadla a teď padáte. V okamžiku otevření padáku jste padali rychlostí v_0, Vaše hmotnosti s padákem je m. K zemi Vás táhne tíhová síla, proti ní účinkuje odporová síla vzduchu o velikosti $12CS\rho v^2$, kde C je asi $1,2$, S plocha padáku a ρ hustota vzduchu. Určete mezní rychlost pádu w (tj. rychlost, při níž se tíhová a odporová síla vyrovnají). Potom spočtěte rychlost pádu v závislosti na čase a další integrací rychlosti zjistěte i závislost vzdálenosti, kterou jste překonali, na čase. V čem se bude lišit Váš pád od padání mezní rychlostí, pokud budete padat hodně dlouho ($t \to \infty$)? Předpokládejte, že pořád padáte rychlostí $v < w$.

5. Hmotné těleso s nulovou počáteční rychlostí se valí po nakloněné rovině. Najděte rovnici pro jeho pohyb, když úhel nakloněné rovnice je α a koeficient tření je μ. Rovnici vyřešte.

6. Těleso o váze 4kg, je zavěšeno na pružince, svojí tíhou prodloužilo délku pružinky o $1cm$. Najděte rovnici pro pohyb tělesa, je-li horní vrchol pružinky nucen silou vykonávat harmonický pohyb $y = 2 \sin 30t$, předpokládejte, že v čase $t = 0$ bylo těleso v klidu.



Obrázek 1: Krivka k uloze 1

12. cvičení řešení

1) rovnice vyšších řádů

notace y'''' ~ čtvrtá derivace značíme $y^{(4)}$

1. $y^{(4)} + ay'' + by = 0$

charakteristický polynom

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$$

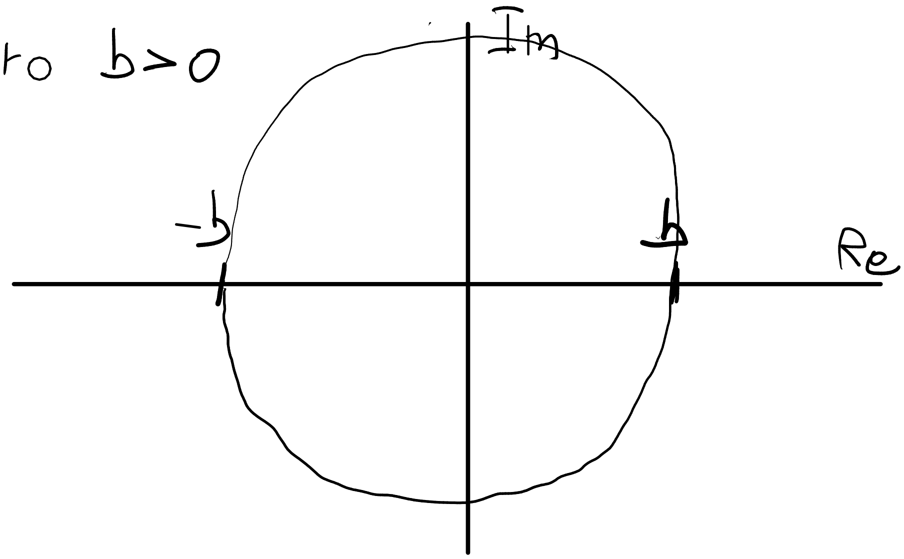
• pro $a = 0$

$$\text{rce } \lambda^4 = -b$$

jak řešit? b je realné λ nemusí!

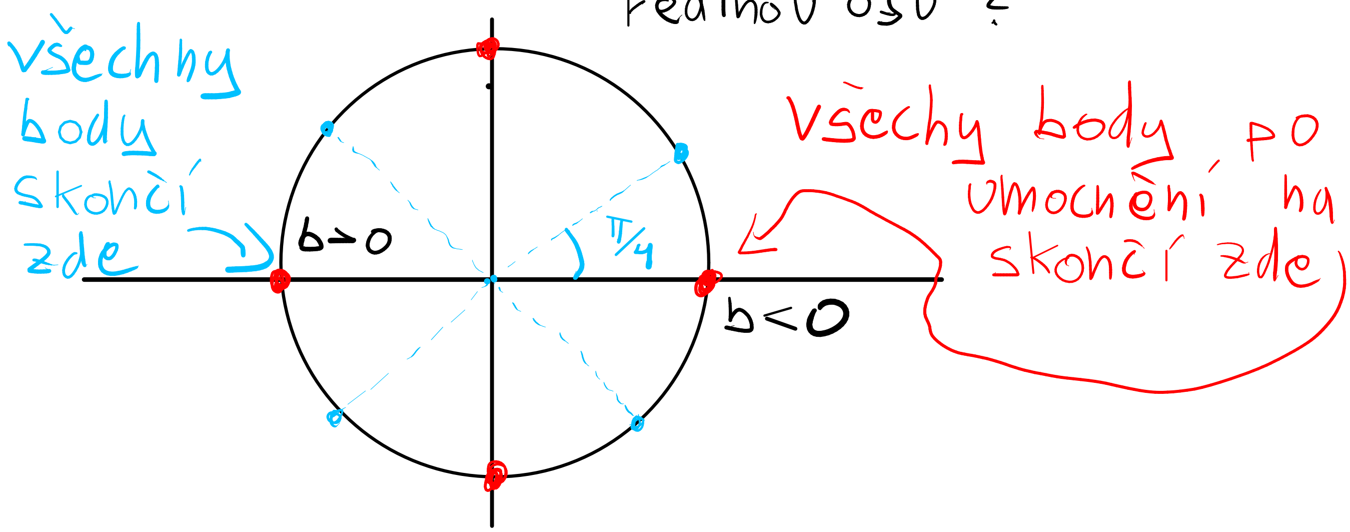
→ zapsat v Komplexní rovině

pro $b > 0$



řešení: 1) intuitivně

$\lambda^4 = b$ ⇒ umocňování v komplexní rovině odpovídá násobení úhlu a mocnění velikosti -> jaké číslo, které 4x zrotujeme padne na reálnou osu?



2) v polárních souřadnicích

• pro b>0

$$\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\lambda^4 = -b, \quad -b = |b|(-1) = |b|(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \sqrt[4]{|b|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos 4\varphi = \cos\pi \\ \sin 4\varphi = \sin\pi\end{array}\right\} \Rightarrow 4\varphi = \pi + 2k\pi$$

$$\underline{\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}}$$

• pro $b<0$

stejný postup $\varphi = \frac{k\pi}{2}$

• vezmeme jednodušší variantu $b<0$

$$\lambda_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{-b}\left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\,\frac{\sin k\pi}{2}\right)$$

pro $k = 0,1,2,3$

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{-b},\ \lambda_2 = \sqrt[4]{-b}\,i,\ \lambda_3 = -\sqrt[4]{-b},\ \lambda_4 = -i\sqrt[4]{-b}$$

2 reálné 2 komplexní kořeny

$$y = c_1 e^{\sqrt[4]{-b}\,x} + c_2 e^{-\sqrt[4]{-b}\,x} + c_3 \cos\sqrt[4]{-b}\,x + c_4 \sin\sqrt[4]{-b}\,x$$

• vrátíme se zpět k $a \neq 0$

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$$

řešíme substitucí $\sigma = \lambda^2$

$\sigma^2 + a\sigma + b = 0 \to$ kvadratická fce

$$\sigma_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2} \to \lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}}$$

→ řešení $y_k = c_k e^{\lambda_k x}$

konkrétní rovnice

1) $y^{(4)} + y'' + y = 0$

$$\lambda^4 + \lambda^2 + 1 = 0$$

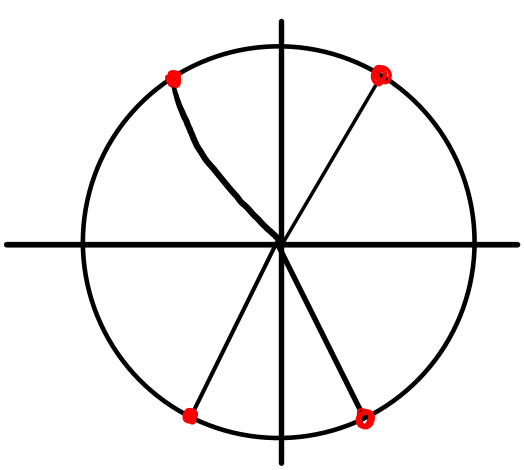
možnost 1. $\rightsquigarrow \sigma^2 + \sigma + 1 = 0 \to \sigma = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

+ dořešit $\lambda^2 = \sigma$

znovu lze řešit graficky + polární tvar, ale můžeme použít exponenciálu

$$\sigma = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \to \sigma = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ a } e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

→ rce $\lambda^2 = \sigma \to \lambda = e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}$



$$\Rightarrow y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$+ c_3 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

2. $y''' + y'' + y' = \cos x$

1. Homo. část $\sim$ $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$

$$\lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \; \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$y_H = c_1 + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$y_p \sim$ variace konstant $\rightsquigarrow$ není lepší metoda?

„Hádací metoda": tipněme $y_p = A\cos x + B\sin x$

$$y''' + y'' + y' = \cos x \to \cancel{A\sin x} - \cancel{B\cos x} - A\cos x - B\sin x$$
$$- \cancel{A\sin x} + \cancel{B\cos x} = \cos x$$

porovnání koef. $\to$ $-A = 1, \; -B = 0$

$\Rightarrow y_p = -\cos x$ je řešení!

celkové řešení je součet $\underline{y_H + y_p}$

2) Eulerova rovnice

$x^2y'' + xy' + y = 1$

1) metoda $y = x^\lambda$ (pro homogení část)

správně bychom měli rci podělit x^2 abychom ji dostali do tvaru v přednášce není to ale potřeba:

dosaďme $y = x^\lambda$: $x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + x\lambda x^{\lambda-1} + x^\lambda = 0$

$$\Rightarrow x^\lambda(\underbrace{\lambda(\lambda-1)+\lambda+1}_{\text{Indexová rovnice}}) = 0$$

$$\lambda^2+1=0 \rightarrow \lambda = \pm i$$

$y = x^{\pm i}$ co to je?? → zjistíme to

$x^{\pm i} = e^{\ln x^{\pm i}} = e^{\pm i \ln x} = \cos(\ln x) + i\sin(\ln x)$ ⇝ systém řešení je

$$y_H = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$$

nehomogení část:

Variace konstant vs „hádání"

$\cdot\ y \to c_1(x)\cos(\ln x) + c_2(x)\sin(\ln x)$

1) variace konstant, dopadne analogicky jako u fcí s konst. koef.

$$y' = \underbrace{c_1'\cos\ln x + c_2'\sin\ln x}_{=0 \text{ první rovnice}} - c_1\frac{\sin\ln x}{x} + c_2\frac{\cos\ln x}{x}$$

$$y'' = -c_1'\frac{\sin\ln x}{x} + c_2'\frac{\cos\ln x}{x} + c_1\frac{\sin\ln x - \cos\ln x}{x^2} - c_2\frac{\sin\ln x + \cos\ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 \underline{y''} + x\underline{y'} + \underline{y} = x^2\left(-c_1'\frac{\sin\ln x}{x} + c_2'\frac{\cos\ln x}{x}\right)$$

$\to$ dvě rovnice

$$c_1'\cos\ln x + c_2'\sin\ln x = 0$$

$$-c_1'\frac{\sin\ln x}{\cancel{x}} + c_2'\frac{\cos\ln x}{\cancel{x}} = \frac{1}{x^{\cancel{2}}}$$

$\to$ Kramerovo pravidlo

$$|W| = \cos^2 \ln x + \sin^2 \ln x = 1$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sin \ln x \\ \frac{1}{x} & \cos \ln x \end{pmatrix} \rightarrow |W_1| = -\frac{\sin \ln x}{x}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} \cos \ln x & 0 \\ -\sin \ln x & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \rightarrow |W_2| = \frac{\cos \ln x}{x}$$

$$c_1' = -\frac{\sin \ln x}{x}, \quad c_2' = \frac{\cos \ln x}{x}$$

$$\rightsquigarrow \quad c_1(x) = \cos \ln x + c_1$$

$$c_2(x) = \sin \ln x + c_2$$

$$y = (\cos \ln x + c_1)\cos \ln x + (\sin \ln x + c_2) \cdot \sin \ln x = \underbrace{c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x}_{y_H} + \underbrace{1}_{y_P}$$

2) „Hádací" metoda

• Je-li na pravé straně polynom zvolte jako y_p polynom stejného řádu a dopočtete koeficienty.

$x^2y'' + xy' + y = 1$, PS → polynom 0-řádu

→ $y_p = A$

dosazení → $A = 1$ ✓

→ pozor je-li na pravé straně kořen homo. části je potřeba tip vynásobit x. (viz. písemka.)

3) Systémy lineárních rovnic

3.1 ukázkový příklad:

notace: $x = x(t), y = y(t)$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}\right\}$$ Jak řešit?

1) Převést na rovnici 2 řádu

- jednu rovnici vybrat a zderivovat

$\dot{y} = x \rightarrow \ddot{y} = \dot{x}$ dosadit do $\dot{x} = y$

→ $\ddot{y} = y$ → řešení $\underline{y = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}}$

dopočítáme x z $\dot{y} = x$ → $\underline{x = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t}}$

2) lineární kombinace rovnic + substituce

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x\end{aligned} \rightsquigarrow \begin{aligned}\dot{x}+\dot{y} &= x+y \\ \dot{x}-\dot{y} &= -(x-y)\end{aligned}$$

substituce : $x+y=U$, $x-y=V$

dostaneme 2 nezávislé rovnice :

$$\begin{aligned}\dot{U} &= U \\ \dot{V} &= -V\end{aligned} \rightarrow \text{Integrace}$$

$U = ce^{t}$, $V = de^{-t}$ musíme vrátit substituci

$x = U+V$, $y = U-V$

$$\left.\begin{aligned}x &= ce^{t}+de^{-t} \\ y &= ce^{t}-de^{-t}\end{aligned}\right\}$$ stejné jako metoda 1.
pro $c=c_1$, $d=-c_2$

Co když nevíme jak rovnice sečíst nebo odečíst?
$\Rightarrow$ vlastní hodnoty

rovnice je tvaru $\boxed{\begin{pmatrix}\dot{x} \\ \dot{y}\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}}$, $M = 2\times2$ matice

my chceme substituci $\begin{aligned}ax+by &= U \\ cx+dy &= V.\end{aligned}$

tak, že soustava rovnic bude:

$\dot{u} = \lambda_1 u$
$\dot{v} = \lambda_2 v$, $\lambda_{1,2}$ - vlastní čísla

změníme matici M na $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ diagonalizace

jde o změnu báze $(1,0), (0,1) \rightsquigarrow \vec{v_1}, \vec{v_2}$
vlastních vektorů
a matice $T = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$

je maticí přechodu
tedy $M = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}$

- jak zjistíme hodnoty λ_1, λ_2 ?

z rovnice $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \rightsquigarrow (A - \mathbb{1}\lambda)\vec{v} = 0$

homogenní soustava lin. rovnic s maticí

$A - \mathbb{1}\lambda \rightsquigarrow$ má netriviální řešení $\Leftrightarrow$

$\det(A - \mathbb{1}\lambda) = 0$ rovnice pro vlastní hodnoty

vlastní vektory zjistíme z rovnice
$(A - \mathbb{1}\lambda)\vec{v} = 0 \rightsquigarrow$ dostaneme T.

Zkusíme si výše popsaný postup na příkladech

3.2

$$\dot{x} = x - 2y$$
$$\dot{y} = -2x + y$$

, matice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

• vlastní hodnoty $\quad M - \mathbb{1}\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \det(M - \mathbb{1}\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$a^2 - b^2$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

jsou kořeny rovnice $\det(M - \mathbb{1}\lambda) = 0$

• vlastní vektory

jsou takové vektory, že $(M - \mathbb{1}\lambda)\vec{v} = 0$

• pro $\lambda_1 = 3$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$

$\vec{v} = (-1, 1)$

• pro $\lambda = -1$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = 0$

$\vec{v} = (1, 1)$

• matice přechodu $T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

opravdu platí $M=T\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}T^{-1}$

• inverzní matice k T

metoda

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$\Rightarrow T^{-1}=\frac{1}{2}T$

• diagonalizace soustavy

začli jsme s $\quad \dot{\vec{x}}=M\vec{x}$

$$\dot{\vec{x}}=TDT^{-1}\vec{x}$$

$$(T^{-1}\dot{\vec{x}})=D\,(T^{-1}\vec{x})$$

substituce $\quad T^{-1}\vec{x}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$

$$u=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$$
$$v=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$$

snadno ověříme, že $\dot{x} = x - 2y$, $\dot{y} = -2x + y$ $\Rightarrow$

$$\dot{U} = 3U$$
$$\dot{V} = -V$$

což vyřešíme jako $U = c e^{3t}$, $V = d e^{-t}$

zpětná tranformace $\vec{x} = T\vec{u}$

$x = -U + V$, $y = U + V$

• **řešení** $x = -c e^{3t} + d e^{-t}$, $y = c e^{3t} + d e^{-t}$

$\Rightarrow$ Celý postup lze zefektivnit:

1) najít vlastní hodnoty

2) napsat řešení ve tvaru

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y = A_3 e^{\lambda_1 t} + A_4 e^{\lambda_2 t}$$

3) pro každé λ zvlášť dosadíme do původní soustavy a vyřešíme pro $A_1, \dots, A_4$

na další příklady použijeme zkrácený postup:

3.3

$$\dot{x} = x + 5y \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\dot{y} = -x - 3y \; ;$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+3)+5 = \lambda^2+2\lambda+2$$

$D = -4 \rightarrow$

$\lambda = -1 \pm i$

$$\rightarrow \quad x = c_1 e^{(-1+i)t} + c_2 e^{(-1-i)t}$$
$$y = c_3 e^{(-1+i)t} + c_4 e^{(-1-i)t}$$

$$\dot{x} = x + 5y$$
$$\dot{y} = -x - 3y \qquad 1) \text{ pro } \lambda = -1+i$$

$$c_1(-1+i)\cancel{e^{-1+i t}} = c_1 \cancel{e^{-1+i t}} + 5c_3 \cancel{e^{-1+i t}}$$

$$c_3(-1+i) = -c_1 - 3c_3$$

$$ic_1 = 2c_1 + 5c_3$$
$$ic_3 = -c_1 - 2c_3$$

rovnice jsou závislé $\quad c_3 = c_1 \left(\frac{-2+i}{5}\right)$

2) pro $\lambda = -1-i$ dostaneme

$$c_2(-1-i) = c_2 + 5c_4$$
$$c_4(-1-i) = -c_2 - 3c_4$$

$\rightsquigarrow$ $c_4 = -c_2 \frac{2+i}{5}$

$\rightsquigarrow$ řešení $x = a e^{(-1+i)t} + b e^{(-1-i)t}$

$$y = \frac{-2+i}{5} a e^{(-1+i)t} - \frac{2+i}{5} b e^{(-1-i)t}$$

3.4

$$\dot{x} = x + 4y$$
$$\dot{y} = -x - 3y \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+3)+4$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

$\lambda = -1$ dvojnásobná vlastní hodnota

lze najit dva vlastní vektory?
(nezávislé)

$$(M - \mathbb{1}\lambda)\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\vec{v} = 0 \rightsquigarrow (-2,1) \text{ je jediné}$$

řešení → matice nelze diagonalizovat
pouze převést do Jordanova kanonického tvaru

musíme hledat řešení ve tvaru $e^{\lambda t}$
$te^{\lambda t}$
$t^2 e^{\lambda t}$

až do násobnosti λ.

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$$
$$y = c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$$

e^{-t} a te^{-t} musíme brát dohromady

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + 4y \\ \dot{y} &= -x - 3y \end{aligned}\right\} \begin{aligned} -c_1 - c_2 t + c_2 &= c_1 + c_2 t + 4c_3 + 4c_4 t \\ -c_3 - c_4 t + c_4 &= -c_1 - c_2 t - 3c_3 - 3c_4 t \end{aligned}$$

z první rce: $c_2 = 2c_1 + 4c_3$

$-2c_2 = 4c_4 \rightarrow c_4 = \frac{-c_2}{2}$

z druhé rce: $2c_3 + c_4 = -c_1$

$2c_4 = -c_2$

sedí

$c_4 = -\frac{1}{2}c_2 \rightarrow$ zbylé rce: $c_2 = 2c_1 + 4c_3$
$2c_3 - \frac{1}{2}c_2 = -c_1$

jsou závislé $\rightarrow c_3 = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2$

c_1, c_2 volné $\rightarrow$ přejmenuji na a, b

• řešení: $x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$
$y = (-\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2)e^{-t} - \frac{1}{2}c_2 t e^{-t}$

3.5 soustava více rovnic

Stejný princip!

$$\dot{x} = y + z \qquad \dot{y} = x + z \qquad \dot{z} = x + y \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda - 1) + 1 + \lambda$$
$$= -\lambda^3 + \lambda + \lambda + 1 + 1 + \lambda$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

nějak vyřešíme: $\lambda_{1,2} = -1,\ \lambda_3 = 2$

$\rightarrow$ řešení $e^{-t},\ te^{-t},\ e^{2t}$

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{2t}$$
$$y = c_4 e^{-t} + c_5 t e^{-t} + c_6 e^{2t}$$
$$z = c_7 e^{-t} + c_8 t e^{-t} + c_9 e^{2t}$$

dopočítáme koeficienty budou 3 volné

$$e^{-t} \begin{cases} -c_1 - c_2 t + c_2 = c_4 + c_5 t + c_7 + c_8 t \\ -c_4 - c_5 t + c_5 = c_1 + c_2 t + c_7 + c_8 t \\ -c_7 - c_8 t + c_8 = c_1 + c_2 t + c_4 + c_5 t \end{cases}$$

$$e^{2t} \left\{ \begin{aligned} 2c_3 &= c_6 + c_9 \\ 2c_6 &= c_3 + c_9 \\ 2c_9 &= c_3 + c_6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &c_3 = c_3 \text{ volné} \\ &c_6 = c_3 \\ &c_9 = c_3 \end{aligned}$$

rozdělíme první sadu podle koef. u t^0 a t^1

$$\left.\begin{aligned} -c_1 + c_2 &= c_4 + c_7 \\ -c_4 + c_5 &= c_1 + c_7 \\ -c_7 + c_8 &= c_1 + c_4 \end{aligned}\right. \quad \begin{aligned} c_2 &= c_5 \\ c_5 &= c_8 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} -c_2 &= c_5 + c_8 \\ -c_5 &= c_2 + c_8 \\ -c_8 &= c_2 + c_5 \end{aligned}\right\} \text{stejné}$$

$$\Rightarrow c_2 = c_8 = c_5 = 0$$

zůstává
$$\left.\begin{aligned} -c_1 &= c_4 + c_7 \\ -c_4 &= c_1 + c_7 \\ -c_7 &= c_1 + c_4 \end{aligned}\right\} \text{stejné}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c_1,\ c_2 = 0,\ c_3 = c_3,\ c_4 = c_4,\ c_5 = 0$$

$$c_6 = c_3,\ c_7 = -c_1 - c_4,\ c_8 = 0,\ c_9 = c_3$$

$$x = c_1 e^{-t} + c_3 e^{2t}$$

$$y = c_4 e^{-t} + c_3 e^{2t}$$

$$z = (-c_1 - c_4) e^{-t} + c_3 e^{2t}$$

Kontrola: $\dot{x} = -c_1 e^{-t} + 2c_3 e^{2t}$

$$= y + z \checkmark$$

$$\dot{y} = -c_4 e^{-t} + 2c_3 e^{2t}$$

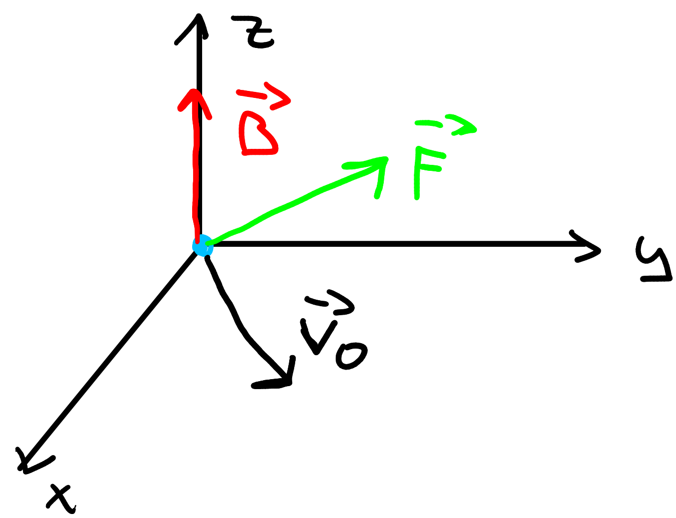
$$= x + z \checkmark$$

$$\dot{z} = c_1 + c_4 e^{-t} + 2c_3 e^{2t}$$

$$= x + y \checkmark$$

4. Fyzikalní příklady

4.1 Proton v magnetickém poli



Pohyb je určen 2. Newtonovým zákonem
na proton působí Lorentzova síla

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, kde q je náboj protonu

$q = e$

$\vec{E}$ el. pole je 0

$\vec{B} = (0, 0, B)$

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

vektorový součin:

např. pomocí tenzoru ε^{ijk}
- $= +1$, ijk je sudá permutace 123
- $= -1$, ijk lichá
- $= 0$ jinak

$F^i = e\,\varepsilon^{ijk} v_j B_k \rightarrow \vec{F} = e(v_y B, -v_x B, 0)$

2. Newtonův zákon: $m\ddot{x} = e\dot{y}B$
$m\ddot{y} = -e\dot{x}B$
$m\ddot{z} = 0$

$\Rightarrow z = At + B,\quad B = 0 = A$ díky poč. podmínkám

$\Rightarrow$ proton se pohybuje v rovině x, y.

Pro jednoduchost označme $\omega = \dfrac{eB}{m}$
(cyklotronová frekvence)

$\rightarrow$ řešíme $\ddot{x} = \omega\dot{y}$
$\ddot{y} = -\omega\dot{x}$

což je rovnice o 1 řád vyšší než jsme měli doteď

1. možnost řešení: substituce: $\dot{x} = v_x$
$\dot{y} = v_y$

$\Rightarrow \dot{v}_x = \omega v_y$
$\dot{v}_y = -\omega v_x$

$\rightarrow$ systém rovnic 1. řádu

Matice $M = \omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

vlastní hodnoty: $(\lambda^2 + \omega^2) = 0 \rightarrow \lambda = \pm i\omega$

řešení: $V_x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
$V_y = C\cos\omega t + D\sin\omega t$

dourčíme konstanty z $\dot{V}_x = \omega V_y$
$\dot{V}_y = -\omega V_x$

$$-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t = \omega C\cos\omega t + \omega D\sin\omega t$$
$$-C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t = -\omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t$$

$\Rightarrow$ $-A = D,\ B = C,\ -C = -B,\ D = -A$

$\Rightarrow$ řešení je $V_x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
$V_y = B\cos\omega t - A\sin\omega t$

vrátíme se k počáteční podmínce:

v $t = 0$ $V = (V_0\cos A, V_0\sin A, 0)$

$\Rightarrow$ $A = V_0\cos A,\ B = V_0\sin A$

$$V_x = V_0(\cos A\cos\omega t + \sin A\sin\omega t)$$
$$V_y = V_0(\sin A\cos\omega t - \cos A\sin\omega t)$$

$\Rightarrow$ součtové vzorce

$$V_x = V_0\cos(\omega t - A)$$
$$V_y = -V_0\sin(\omega t - A)$$

skutečný pohyb dostaneme integrací

$$x = x_0 - \frac{v_0}{w}\sin(wt - A)$$
$$y = y_0 - \frac{v_0}{w}\cos(wt - A)$$

v $t = 0$ $x = 0, y = 0 \Rightarrow x_0 = 0$
$$y_0 = \frac{v_0}{w}$$

$$x = -\frac{v_0}{w}\sin(wt - A)$$
$$y = \frac{v_0}{w} - \frac{v_0}{w}\cos(wt - A)$$

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0}{w}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{w}\right)^2$$

částice se pohybuje po kružnici o poloměru $\frac{v_0}{w}$ se středem $\left(0, \frac{v_0}{w}\right)$

Alternativní způsoby řešení

1) převod na rovnici vyššího řádu

$$\ddot{x} = w\dot{y}$$
$$\ddot{y} = -w\dot{x} \rightarrow \text{zderivujme}$$
$$y^{(3)} = -w\ddot{x} = -w^2\dot{y}$$

$$\Rightarrow y^{(3)} + w^2\dot{y} = 0$$

$$\lambda^3 + w^2\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda^2 + w^2) = 0$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm iw$$

$\Rightarrow y = c_1 + c_2 \cos \omega t + c_3 \sin \omega t$

$\rightarrow$ z rce $\ddot{y} = -\omega \dot{x}$ dopočítame x

a z počátečních podmínek dostaneme konstanty

2) Vlastní hodnoty

jak už jsme viděli systém

$$\ddot{x} = \omega \dot{y}$$
$$\ddot{y} = -\omega \dot{x}$$

má vlastní hodnoty $\pm i$

můžeme dopočítat vlastní vektory ty vyjdou $(\pm i, 1)$

$\Rightarrow$ zkusme rovnice takto odečíst

$$\ddot{x} - i\ddot{y} = \omega \dot{y} + \omega i \dot{x}$$

vytkneme $i\omega$ $\quad \ddot{x} - i\ddot{y} = i\omega(\dot{x} - i\dot{y})$

$\rightarrow$ substituce $z = x - iy$ převede rci na

$\ddot{z} = i\omega \dot{z}$ rce 2. řádu s konst koef.

$$\lambda^2 = i\omega\lambda \rightarrow \lambda = 0 \text{ a } \lambda = i\omega$$

$\rightarrow z = c + Ae^{i\omega t}$

$$z = c + \underbrace{A\cos\omega t}_{x} + i\underbrace{A\sin\omega t}_{-y}$$

c → můžeme dát do x nebo y, ale musí být v souladu s poč. podmínkami.

Písemka ukázkové řešení:

$$y' - \frac{2x}{1-x^2}y = \frac{1}{1+x} \quad \cdot \Big/ \; e^{\int \frac{-2x}{1-x^2}dx}$$

$$e^{\ln|1-x^2|} = |1-x^2|$$

$$\left(y\cdot(1-x^2)\right)' = \frac{1-x^2}{1+x}$$

Kontrola $\searrow$ $y'(1-x^2) - 2xy$ ✓

$$\int \left(y(1-x^2)\right)' = \int 1-x \, dx$$

$$y(1-x^2) = x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x - \frac{x^2}{2} + C}{1-x^2}$$

poč. podm: $y(0) = 1 \Rightarrow \underline{C = 1}$

2) $y'' - 2y' = \sinh x$

Homo : $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$

$y_H = c_1 + c_2 e^{2x}$

variace konstant : $c_1' + c_2' e^{2x} = 0$

$0 + 2c_2' e^{2x} = \sinh x$

$c_2' = \frac{1}{2} e^{-2x} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$

$c_2 = \frac{1}{4} \left(\int e^{-x} - e^{-3x} \right)$

$c_2 = \frac{1}{4} \left(-e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + c_2 \right)$

$c_1' = -e^{2x} c_2' = -\frac{1}{2} \sinh x$

$c_1 = -\frac{1}{2} \cosh x + c_1$

$\Rightarrow y = c_1 - \frac{1}{2} \cosh x + \frac{1}{4} e^{2x} \left(-e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + c_2 \right)$

lze vyřešit uhodnutím partikulárního řešení tvaru

$$y_p = a\sinh x + b\cosh x$$

dosadit : $y_p' = a\cosh x + b\sinh x$

$$y_p'' = y_p$$

$\to y_p'' - 2y_p' = \sinh x$

$a\sinh x + b\cosh x - 2a\cosh x - 2b\sinh x$

$= \sinh x$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a - 2b = 1 \quad a - 4a = 1 \to a = -\frac{1}{3} \\ b - 2a = 0 \Rightarrow b = 2a \quad b = -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$y_p = -\frac{1}{6}(e^x - e^{-x}) - \frac{2}{6}(e^x + e^{-x})$$

$$= -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{6}e^{-x}$$

✓ ✓ sedí