

1 Vyřešte průběh funkce $\ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

1. Určete definiční obor funkce.
2. Je funkce spojitá? Pokud ne, najděte body nespojitosti a určete jejich typ. Body nespojitosti zkuste hledat tam kde funkce není definovaná.
3. Určete paritu funkce (sudost/lichost), tím že upravíte výraz $f(-x)$. Je funkce periodická? Pokud se ve funkci neobjevují periodické funkce $\sin x$, $\cos x$ tak pravděpodobně nebude periodická, pokud se tyto funkce vyskytují, využijte jejich periodicity.
4. Najděte body x pro které platí, $f(x) = 0$. Poté co najdete tyto nulové body rozdělte definiční obor a určete kde je funkce kladná a kde záporná.
5. Najděte body x pro které platí $f'(x) = 0$, najděte definiční obor derivace funkce $f'(x)$.
6. Rozdělte definiční obor $f'(x)$ a najděte intervaly kde platí $f'(x) > 0$ (tedy funkce je rostoucí) a intervaly kde $f'(x) < 0$ (tedy funkce je klesající). Poté určete extrémy funkce $(x_0, f(x_0))$. Jedná se o lokální nebo globální extrémy? (Toto můžete zodpovědět i později, až budete mít asymptoty).
7. Najděte body x pro které platí $f''(x) = 0$, najděte definiční obor druhé derivace funkce $f''(x)$.
8. Rozdělte definiční obor $f''(x)$ a najděte intervaly kde platí $f''(x) > 0$ (tedy funkce je konvexní) a intervaly kde $f''(x) < 0$ (tedy funkce je konkávní). Poté určete inflexní body funkce $(x_0, f(x_0))$.
9. Najděte asymptoty se směrnicí i bez směrnice.
 - Bez směrnice: Jedná se o svislé přímky typu $x = x_0$, bod x_0 je takový, že platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$
 - Se směrnicí: Jedná se o přímky $y = ax+b$, pro které platí, že $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$. Koeficienty dostanete takto: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$
10. Načrtněte graf funkce. Prvně si do grafu zakreslete všechny důležité body (body nespojitosti, nulové body, extrémy a inflexní body), pak zakreslete asymptoty a nakonec spojte všechny body tak aby graf splňoval to co jste o funkci zjistili (její parita, periodičnost, zda je kladná či záporná, monotonie (roste, klesá), konvexnost, konkávnost)

2 Diferenciály a přibližné výpočty

1. Vemte si funkci $f(x) = \sin x$, pro malé hodnoty x . Funkci nahraďte její tečnou v bodě $x = 0$, pomocí této tečny přibližně spočtěte hodnoty $\sin(-0.1)$ a $\sin(0.1)$. Hodnoty kalkulačkou porovnejte se skutečnými. Jaké chyby jste se dopustili? Co byste mohli udělat aby váš typ byl přesnější?
2. Stejnou metodou přibližně spočtěte hodnoty $\sqrt{80}$. Znáte nějakou hodnotu blízkou 80 z nichž víte odmocninu přesně? Vemte funkci \sqrt{x} a k ní vypočtěte rovnici tečny v tom bodě ve kterém hodnotu odmocniny znáte. Pomocí této tečny přibližně odhadněte hodnotu $\sqrt{80}$.
3. Stejným způsobem přibližně spočtěte $\sqrt[3]{30}$
4. Máte výraz $\lambda_{\pm} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4m}}{2}$, přibližně určete hodnoty λ_+ a λ_- , jestliže platí $M \gg m$.
5. Proveďte rozvoje následujících funkcí, pro malá x

$$\sqrt{1 \pm x}, \quad \frac{1}{1 \pm x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}}, \quad \frac{1}{(1 \pm x)^2}, \quad \sin x, \quad e^x, \quad \ln(1 + x)$$

3 Slovní úlohy

1. Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu 32 m³ tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo minimum materiálu.
2. Jaký tvar má mít válec, aby měl při zadaném objemu co nejmenší povrch?

4 Derivace cyklometrických funkcí

1. Zjistěte derivaci funkcí

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x$$

Nápověda:

Vyjděte z definičního vzorce $\arcsin(\sin x) = x$ a nebo ekvivalentně $\sin(\arcsin x) = x$. Obě strany rovnice derivujte, s pomocí pravidla derivace složené funkce, derivaci $\arcsin x$ berte jako neznámou a rovnicí vyřešte. Podobně pro ostatní funkce.

Dokážete odvodit obecný vzorec pro derivaci inverzní funkce $(f^{-1})'$?

5 Těžší příklad

1. Derivujte funkci x^x .