Goniometrické a hyperbolické integrály a substituce

1 Goniometrická část

1.1 Základy

Hlavním vzorcem který se při integraci využívá je

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Ze základních derivací těchto funkcí $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$ vyplývá $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C,\ \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$.

1. S využitím vzorce $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ spočtěte tyto integrály: $\int \cos^2 x \mathrm{d}x,\ \int \sin^2 x \mathrm{d}x$, tím že integrandy vyjádříte pomocí $\cos(2x)$ a poté použijete lineární substituci.

2. Rozšířením zlomku vhodným výrazem a použitím vhodné substituce spočtěte následující integrály
$$\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x$$

3. Podobným způsobem vypočtěte tyto integrály
$$\int \tan x \mathrm{d}x, \quad \int \sin^3 x \mathrm{d}x$$

1.2 Substituční použití

Ve cvičení jsme počítali integrál $\int \sqrt{1-x^2}$ a to tak, že jsme použili substituci $x = \sin u$ a vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

4. Podobným způsobem spočtěte následující integrály (u některých bude substituce trochu jiná, můžete použít i jiné goniometrické funkce jako třeba $\tan x$)
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x, \quad \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{x(1-x)} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

Pozor předposlední integrál $\int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x$ je možný dělat dokonce více způsoby (2 jste viděli na cvičení).

2 Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce jsou velmi podobné goniometrickým co se týče jejich vlastností a toho jak vypadají vzorce které pro ně platí.

Definice je následující

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

5. Z výše uvedené definice dokažte, že platí následující vztah

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Což je obdoba goniometrické jedničky.

6. Obdobně jako, má kružnice $x^2+y^2 = R^2$ parametrizaci $x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$ pomocí goniometrických funkcí dokažtě, že hyperbola $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ má s použitím vzorce $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ parametrizaci pomocí hyperbolických funkcí.

7. $\tanh x$ je definován jako $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ jak vypadá zapsaný pomocí exponenciál? Dále vypočtěte derivace funkcí $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ a vyjádřete tyto derivace pomocí hyperbolických funkcí

8. Řešením rovnice $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ vůči y najděte inverzní funkci k $\sinh x$, kterou značíme $y = \operatorname{arcsinh}$, obdobně pro ostatní hyperbolické funkce.

9. Dokažte následující vzorce: $\sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x$, $\cosh(2x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x$

10. Podobně jako pro goniometrické funkce spočtěte následující integrály

$$\int \cosh^2 x \mathrm{d}x, \quad \int \sinh^2 x \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\cosh x}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sinh x}\mathrm{d}x, \quad \int \sinh^3 x \mathrm{d}x, \quad \int \tanh x \mathrm{d}x$$

11. Hyperbolický vztah $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ můžeme použít k řešení integrály tím, že zvolíme hyperbolickou substituci, vypočtěte následující integrály

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x, \quad \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$$

3 Goniometrické integrály

Toto budeme dělat na následujícím cvičení (ale v rychlosti)

V přednášce jste se dozvěděli, že pomocí vhodných substitucí můžeme převést jakýkoliv racionální výraz obsahující goniometrické funkce na integrál z racionálně lomené funkce, které umíme řešit. To jaké substituce zvolit záleží na tom jak integrand vypadá.

Speciální substituce

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ řešíme pomocí substituce

(a) jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \sin x$;

(b) jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \cos x$;

(c) jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, volíme substituci $t = \tan x$;

(d) jestliže nenastane ani jedna z předchozích možností, použijeme k řešení tzv.univerzální substituci:

$$t = \tan\frac{x}{2} \to x = 2\arctan t \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Vypočtěte následující integrály (nebo alespoň převeďte do tvaru racionálně lomenné funkce)

12.

$$\int \sin^n x \cos^m x\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x, \quad \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \cot^3 x + \cot^4 x\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{1}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \cos x \cos 2x \cos 3x\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\cos 2x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{1+\sin(2x)}\,\mathrm{d}x$$

První integrál nemusíte počítat pouze si rozmyslete jakou použijete substituci.

4 Řešení

1. Využíváme vzorce $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ a vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dostaneme $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ a $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ a tedy platí

$$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 2x = u \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos(u) + C$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

$$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

2.
$$\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ \\ \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1}{1-u^2} \mathrm{d}u =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} + C = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + C$$

Což je integrál, který budeme řešit níže. Také můžeme využít jiný způsob a to využití goniometrických vztahů a to konkrétně $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$, což nám pomůže protože s využitím toho, že $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x = -\int \frac{-1}{\sin^2 x} \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cot x \\ \\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \mathrm{d}u =$$

$$= -\operatorname{arcsinh} u + C = -\operatorname{arcsinh} \cot x + C$$

Tento integrál budeme také počítat níže.

3. První integrál je jednoduchý

$$\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ \\ \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1}{u} \mathrm{d}u = -\ln|\cos x| + C$$

Druhý musíme upravit

$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x) \sin x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ \\ \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int (1-u^2) \mathrm{d}u =$$

$$= u + \frac{u^3}{3} + C = \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

4. Tyto integrály používají různé substituce

(a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sin u \\ \\ \mathrm{d}x = \cos u \, \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \mathrm{d}u = \int \frac{\cos u}{\sqrt{\cos^2 u}} \mathrm{d}u = \int 1 \mathrm{d}u =$$

$$= u + C = \arcsin(x) + C$$

(b)

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = a\tan u \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{1}{\left(a^2\left(\tan^2 u+1\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{a}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = \int a^{(1-3)}\cos^{(3-2)} u\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \cos u \mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\sin u + C = \frac{1}{a^2}\sin\arctan\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

(c)

$$\int \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sin^2 u \\ \\ \mathrm{d}x = \sin(2u)\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \sqrt{\sin^2 u(1-\sin^2 u)}\,\sin(2u)\mathrm{d}u = \int \sin u\cos u\sin(2u)$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin^2(2u)\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos(4u)\right)\mathrm{d}u = \frac{u}{4} - \frac{\sin 4u}{16} + C$$

Teď musíme vyjádřit $\sin(4u)$ pomocí x což je $\sin^2 u$. Tedy

$$\sin(4u) = 2\sin(2u)\cos(2u) = 4\sin u\cos u\left(\cos^2 u - \sin^2 u\right) =$$

$$4\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}\left(1-\sin^2 u-\sin^2 u\right) = 4\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}\left(1-2\sin^2 u\right) =$$

$$= 4\sqrt{x}\sqrt{1-x}\,(1-2x)$$

A dostaneme pro náš integrál, že

$$\int \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{x}\sqrt{1-x}\,(1-2x) + C$$

(d)

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x-a = (b-a)\sin^2 u \\ \\ \mathrm{d}x = (b-a)\sin(2u)\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{(b-a)\sin(2u)}{\sqrt{(b-a)\sin^2 u(b-a)(1-\sin^2 u)}}\mathrm{d}u =$$

$$= \int \frac{\sin(2u)}{\sqrt{\sin^2\cos^2 u}}\mathrm{d}u = \int 2\mathrm{d}u = 2u + C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

(e) Tento integrál jsme počítali na cvičení a to buďto substitucí nebo přes parciální zlomky, zde ukážu verzi přes parciální zlomky

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x\right) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

(f)

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \tan u \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2}\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\tan^2 u}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int \tan^2 u \cos^2 u \mathrm{d}u = \int \sin^2 u \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin(2u) + C = \frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4}2\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

5. Zde pouze dosadíme do $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ a dostaneme

$$\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)\right) = 1$$

6. Parametrizace je

$$x = a\cosh t$$
$$y = b\sinh t$$

7.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$
$$(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$
$$\tanh' x = (\frac{\sinh x}{\cosh x})'\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

8. Toto budeme řešit jako kvadratickou rovnici pro $a = e^y$

$$2x = a - \frac{1}{a} \to a^2 - 2xa - 1 = 0 \to a_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Vrácením substituce $a = e^y$ vidíme, že pouze kořen s plusem dává smysl (logaritmus záporného čísla není definován) a dostaneme

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Obdobným způsobem dostaneme

$$\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{1-x^2})$$

$$\operatorname{arctanh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

9. Tyto vzorce lze dokázat rozepsáním

$$\sinh(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) = \frac{1}{2}\left((e^{x})^2 - (e^{-x})^2\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\left(e^{x} - e^{-x}\right) = 2\sinh x \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) = \cosh(2x)$$

10. S využitím výše uvedených vzorců spočteme integrály

$$\int \cosh^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1+\cosh(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\cosh(2x) + C$$

$$\int \sinh^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cosh(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cosh(2x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh x}\mathrm{d}x = \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \sinh x \\ \\ \mathrm{d}u = \cosh x \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \arctan(\sinh(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh x}\mathrm{d}x = \frac{\sinh x}{\cosh^2 x - 1}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cosh x \\ \\ \mathrm{d}u = \sinh x \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = \ln\sqrt{\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}}$$

$$\int \sinh^3 x \mathrm{d}x = \int (\cosh^2 x - 1)\sinh x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \sinh x \\ \\ \mathrm{d}u = \cosh x \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int (u^2-1)\mathrm{d}u = \frac{\sinh^3}{3} - \sinh x + C$$

$$\int \tanh x \mathrm{d}x = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\mathrm{d}x == \left| \begin{array}{c} u = \cosh x \\ \\ \mathrm{d}u = \sinh x \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|\cosh x| + C$$

11. Integrály za pomocí hyperbolické substituce:

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sinh u \\ \\ \mathrm{d}x = \cosh u \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \cosh^2 u \mathrm{d}u = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\cosh(2u) + C =$$

$$= \frac{\operatorname{arcsinh} x}{2} + \frac{1}{2}x\cosh(\operatorname{arcsinh} x) + C = \frac{\operatorname{arcsinh} x}{2} + \frac{1}{2}x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sinh u \\ \\ \mathrm{d}x = \cosh u \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int 1\mathrm{d}u = \operatorname{arcsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = \sinh u \\ \\ \mathrm{d}x = \cosh u \mathrm{d}u \end{vmatrix} = \int \frac{1}{\cosh u}\mathrm{d}u = \arctan(\sinh(u)) + C = \arctan(x) + C$$

Což jsme ale věděli.

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$$

Viz sbírka kolegy Cidlinského.

12. (a)

$$\int \sin^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x, \quad \text{pouze si rozmyslete jakou substituci pouzijete}$$

Tento příklad byl rozebraný na přednášce (slide 53 čtvrté prezentace)

(b)

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \tan x \\ \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{vmatrix} =$$

V integrálu máme $\cos x$ musíme ho tedy vyjádřit pomocí $\tan x$ abychom za substituci mohli dosadit. Z předchozích cvičení víme, že

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \to \cos x = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}}$$

Zde nám stačí vzorec pro $\frac{1}{\cos^2 x}$. Víme tedy jak provést substituci

$$\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \tan x \\ \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{vmatrix} = \int (1+t^2)\,\mathrm{d}t = t + \frac{t^3}{3} + C = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$$

(c)

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{vmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{1+4t^2+3(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{4+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int 1 - \frac{5}{4+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \frac{5}{2}\arctan\frac{t}{2} + C = \cos x - \frac{5}{2}\arctan\frac{\cos x}{2} + C$$

(d)

$$\int \cot^3 x + \cot^4 x\,\mathrm{d}x$$

Tyto integrály je nejlepší spočítat zvlášť

$$\int \cot^3 x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^3}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2t^2} - \ln|t| + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C$$

$$\int \cot^4 x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan x \\ \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

Zde si musíme, ještě vyjádřit $\sin x$ pomocí $\tan x$ a to takto $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$$\int \cot^4 x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan x \\ \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{(1+t^2)^3}\frac{(1+t^2)^2}{t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^4(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + \arctan t +$$

$$= -\frac{1}{3\tan^3 x} + \frac{1}{\tan x} + x + C$$

(e)

$$\int \frac{1}{2-\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\frac{2+2t^2-1+t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{1+3t^2}\,\mathrm{d}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\arctan\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} + C$$

(f)

$$\int \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$$

Toto není příklad racionální funkce, ale i tak ho můžeme vyřešit.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{\tan x} \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{2t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\frac{2t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t =$$

Dostali jsme se k zajímavé úloze na parciální zlomky. Prvně musíme rozložit $1+t^4$ na kořeny. Na to si pomůžeme trikem. Šlo by to ale také řešit substitucí $t^2 = s$ a poté vyřešením kvadratické rovnice.

$$1 + t^4 = 1 + 2t^2 + t^4 - 2t^2 = (t^2+1)^2 - (\sqrt{2}t)^2 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$$

Tedy
$$\int \frac{2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad A+C=0\\
x^2 &: \quad -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0\\
x^1 &: \quad A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0\\
x^0 &: \quad B+D=2
\end{aligned}$$

$$A=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad B=1,\quad C=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad D=1$$

$$\int \frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)}+\frac{-t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right)}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|t^2+\sqrt{2}t+1| + 2\arctan(\sqrt{2}t+1) - \ln|t^2-\sqrt{2}t+1| - 2\arctan(1-\sqrt{2}t)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|\tan x+\sqrt{2}\sqrt{\tan x}+1| + 2\arctan(\sqrt{2}\sqrt{\tan x}+1) - \ln|\tan x-\sqrt{2}\sqrt{\tan x}+1|$$
$$-2\arctan(1-\sqrt{2}\sqrt{\tan x})\Big)$$

(g)

$$\int \frac{\sin x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\tan x \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}}{\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}-\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Nyní bychom museli upravovat tento výraz, ale lze to dopočítat pomocí způsobů, které jsme se naučili v minulých kapitolách. Lze tento integrál však řešit jednodušeji, prvně použijeme goniometrické vzorce na upravení a dostaneme

$$\int \frac{\sin x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan x}{\tan x-1} \left| \begin{array}{c} t=\tan x \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t}{t-1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{(t-1)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1-t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln|t^2+1| + \frac{1}{2}\arctan t + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\tan x-1| - \frac{1}{4}\ln|\tan^2 x+1| + \frac{1}{2}x + C$$

(h)

$$\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$$

Zde je znovu lepší použít goniometrických identit, samozřejmě je také tento příklad možné počítat pomocí substitucí, ale není to nutné.

$$\cos x \cos 3x = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + \cos(4x)\right), \quad \frac{1}{2}\cos(2x)\left(\cos(2x) + \cos(4x)\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \cos(2x) + \cos(4x)\right.$$

Tedy

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(1 + \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x)\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{6}\sin(6x)\right) + C$$

(i)

$$\int \frac{\cos 2x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-2\sin^2 x}{(1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1-2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int 1-2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \mathrm{d}t = t-4\left(\arctan t - \frac{t}{t^2+1}\right)+C =$$

$$= \tan\frac{x}{2} - 4\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\right) + C$$

(j)

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan\frac{x}{2} \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)(2t+1-t^2)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int \frac{4t+2}{5(t^2+1)} + \frac{t+2}{5(t^2-t-1)} =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\ln|t^2+1| + \arctan t\right) + \frac{1}{10}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)\ln|-2t+\sqrt{5}+1| - \left(\sqrt{5}-1\right)\ln|2t+\sqrt{5}-1|\right) =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\ln|\tan^2\frac{x}{2}+1| + \arctan\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{10}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)\ln|-2\tan\frac{x}{2}+\sqrt{5}+1| - \right.$$

$$\left. - \left(\sqrt{5}-1\right)\ln|2\tan\frac{x}{2}+\sqrt{5}-1|\right)$$

(k)

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Zde máme chyták, tento příklad je jen na pozornost a znalost základních goniometrických vzorců.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \tan 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C$$

(l)

$$\int \frac{1}{1+\sin(2x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \tan x \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+2\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2\frac{t}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1+2t+t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+t} + C = -\frac{1}{1+\tan x} + C$$