Písemka 3: derivace, řešení

1.1) $F(x) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

$F'(x) = ?$ použijeme vzorce: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x)$, $\left(\frac{F}{g}\right)' = \frac{F'\cdot g - F\cdot g'}{g^2}$ $\Rightarrow$

$$F'(x) = \frac{1}{6}\,\frac{\cancel{x^2-x+1}}{(x+1)^{\cancel{2}}}\,\frac{2(\cancel{x+1})(x^2-x+1)-(x+1)^{\cancel{2}}(2x-1)}{(x^2-x+1)^{\cancel{2}}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\,\frac{2x^2-2x+2-2x^2+x-2x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{2}{\cancel{3}}\,\frac{1}{\frac{3+(2x-1)^2}{\cancel{3}}}$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{-3x+3}{x^3+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{(-x+1)+(x+1)}{x^3+1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{x^3+1}}}$$

1.2) derivace $2^{\sin(\ln x^2)}$ použijeme $(2^x)' = \ln 2\cdot 2^x$

$[F(g(x))]' = F'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\left(2^{\sin(\ln x^2)}\right)' = \ln 2\cdot 2^{\sin(\ln x^2)}\cdot\cos(\ln x^2)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x$$

2.1) přibližně určete $0.95\cdot\ln(0.95)$

Funkce je $F(x) = x\cdot\ln x$, známe $F(1) = 1\cdot\ln 1 = 0$

$\Rightarrow x_0 = 1$, $x = 0{,}95$, $h = x - x_0 = -0{,}05$

2.2) $M >> m$; $\dfrac{1}{\sqrt{M^2 \pm m^2}} = \dfrac{1}{M}\dfrac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{m^2}{M^2}}}$, udělame

rozvoj funkce $\dfrac{1}{\sqrt{1 \pm x}}$, okolo $x=0$ kde $x = \dfrac{m^2}{M^2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \sim f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2$$

$$\cancel{f'(0)} = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)'\Big|_{x=0}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)''\Big|_{x=0} = \frac{3}{4}(1+x)^{-5/2}\Big|_{x=0} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)''\Big|_{x=0} = \frac{3}{4}(1-x)^{-5/2}\Big|_{x=0} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{M^2 + m^2}} \sim \frac{1}{M}\left(1 \mp \frac{m^2}{2M^2} + \frac{3}{8}\frac{m^4}{M^4}\right)$$

3) slovní úloha

$a, b \in (0,1)$

vztah: $1 = a + b$

chceme najít extrém $a \cdot b + \frac{1}{a \cdot b}$

$\rightarrow$ dosadíme za $b = 1 - a \rightarrow a(1-a) + \frac{1}{a(1-a)}$

$\rightarrow$ derivace

$$1 - 2a + \frac{2a-1}{(a(1-a))^2} = 0$$

vytkneme $(1-2a)\left[1 - \frac{1}{(a(1-a))^2}\right] = 0$

1 řešení: $1 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

další řešení: $1 - \frac{1}{(a(1-a))^2} = 0 \quad \Big| \cdot (a(1-a))^2$

$$(a(1-a))^2 - 1 = 0$$

použijeme $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$(a(1-a)+1) \cdot (a(1-a)-1) = 0$$

$\Rightarrow$ $a(1-a)+1 = 0$ a ~~zá~~ $a(1-a) - 1 = 0$

Kvadratické rce

$\downarrow$ $a = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $\downarrow$ $a = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\rightarrow$ nejsou reálná

$\downarrow$ ~~jedno~~ $\cancel{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \in (0,1)}$ ani jedno není $\in (0,1)$

$\Rightarrow$ 1 řešení $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\cancel{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

intervalu

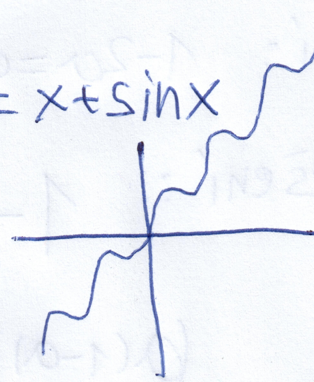
$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},1)$
$+\cdot-$	$-\cdot-$
$\searrow$ klesá	$\nearrow$ roste

$a=\frac{1}{2}$ je minimum

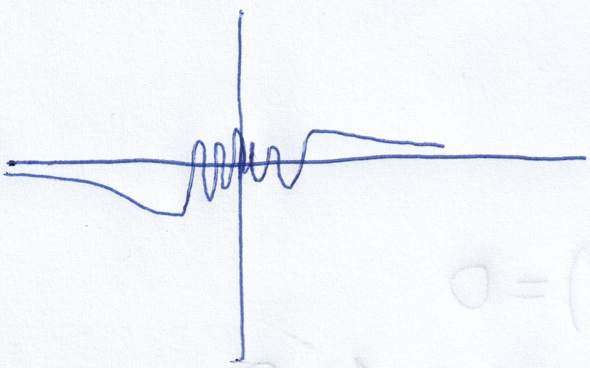
4) úloha na zamyšlení:

Funkce, která má ∞-mnoho inflexních bodů t. j. bodů x takových, že $f''(x)=0$, ale funkce není periodická:

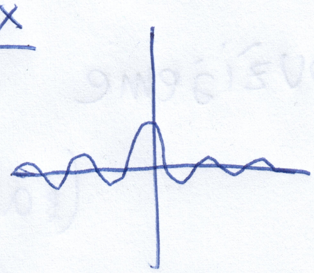
Příklady možných řešení: $\cdot\; f(x)=x+\sin x$



$\cdot\; f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$



$\cdot\; f(x)=\frac{\sin x}{x}$



$\cdot\; f(x)=e^{-x}\sin x$