1 Integrály - základ

Doplňte následující tabulku:

funkce	derivace	integrál
x^n	nx^{n-1}	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln a$	
$\sinh x$	$\cos x$	
$\cosh x$	$\sin x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	
$\operatorname{arcsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\operatorname{arccosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\operatorname{arctanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	

Neurčitý integrál

Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f, jestliže platí $F'(x) = f(x)$. Pozor tato primitivní funkce není určena jednoznačně, protože $F(x) + C$ je také primitivní funkce k funkci $f(x)$, protože $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$
Integrál z funkce f je definovaný jako množina všech primitivních funkcí F k funkci f a značí se takto

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)$$

Základní vzorce a metody

$$\int f(x) \pm g(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x, \quad \int k \cdot f(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$$

Metoda per partes: $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)$

Substituční metoda: $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} g(x) = u \\ g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{vmatrix} = \int f(u)\mathrm{d}u$

2 Ukázkové příklady

Spočtěte následující integrály

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}, \qquad \int -\frac{1}{\cos x}$$

3 Jednoduché příklady na substituční metodu

1. $$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$$

2. $$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$$

3. $$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+2}\mathrm{d}x$$

4. $$\int \tan x\,\mathrm{d}x$$

5.
$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$$

6.
$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$$

7.
$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$$

4 Příklady na úpravu výrazu nebo substituci

1.
$$\int \frac{2x+3}{2x+1}\mathrm{d}x$$

2.
$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\mathrm{d}x$$

3.
$$\int \frac{x}{2x^2+3}\mathrm{d}x$$

4.
$$\int x\sqrt{2-5x}\mathrm{d}x$$

5.
$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$$

6.
$$\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

7.
$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

8.
$$\int \cos x e^{\sin x}\mathrm{d}x$$

9.
$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

10.
$$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$$

11.
$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x$$

12.
$$\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x$$

13.
$$\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x$$

5 Příklady na per partes

Spočtěte následující integrály metodou per partes (nebo i jinou pokud to zvládnete).

1.
$$\int \frac{x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$$

2.
$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x$$

3.
$$\int \ln^2 x \mathrm{d}x$$

4.
$$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \mathrm{d}x$$

5.
$$\int \arcsin x \mathrm{d}x$$

6.
$$\int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x$$

7.
$$\int \frac{xe^x}{(1 + x)^2} \mathrm{d}x$$

6 Složitější příklady: náročnější substituce nebo kombinace substituce a per partes

1. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} \mathrm{d}x$$

2. $$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$$

3. $$\int \sqrt{x(1-x)} \mathrm{d}x$$

4. $$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \mathrm{d}x$$

5. $$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \mathrm{d}x$$

6. $$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}$$

7. $$\int \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x$$

8. $$\int \sqrt{1+x^2} \mathrm{d}x$$

9. $$\int e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

10. $$\int x \arcsin x^2 \mathrm{d}x$$

11. $$\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} x$$

12. $$\int \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$$

13.
$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

14.
$$\int \frac{x^2}{9-x^2}\mathrm{d}x$$

7 Řešení

7.1 Ukázkové příklady

1.
$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Příklady kde máme zlomek s polynomy je dobré zkusit upravit na jednodušší sčítance, zde konkrétně chceme využít znalosti derivace $\arctan x$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1-1+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x - \arctan x + C$$

2.
$$\int -\frac{1}{\cos x}$$

Zde jde jen o test paměti, ze cvičení s průběhem funkce kde jsme řešili funkci $\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, jejíchž derivace byla $-\frac{1}{\cos x}$, chápeme-li definici integrálu můžeme tedy spočítat

$$\int -\frac{1}{\cos x} = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} + C$$

7.2 Jednoduché příklady na substituční metodu - řešení

1.
$$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$$

Ukázkový příklad na lineární substituci pro $f(ax+b)$

$$\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = 2x-3 \\ \\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int u^{10}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{u^{11}}{22} = \frac{(2x-3)^{11}}{22}$$

2.

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$$

Další příklad na lineární substituci, chceme totiž využít znalosti integrálu $\frac{1}{1+x^2}$ to tedy bude naše $f(x)$, musíme tedy dostat integrál do tvaru $f(ax+b)$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\frac{1}{a}}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

Tento integrál si klidně můžete přidat mezi tabulkové a používat ho.

3.

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+2}\mathrm{d}x$$

Všimněme si, že tento integrál je zlomek kde čitatel je derivací jmenovatele, je tedy typu $\int f(g(x))\cdot g'(x)\mathrm{d}x$, pro $f(x)=\frac{1}{x}$, nebo jednodušeji tvaru $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Tyto typy integrálů se řeší substitucí a jsou předmětem této podkapitoly. Konkrétně:

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = x^3+x+2 \\ \\ \mathrm{d}u = (3x^2+1)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln(x^3+x+2)+C$$

4.

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x$$

Znovu si všimneme, že $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ je typu $\frac{f'(x)}{f(x)}$, tedy až na znaménko, ale to nevadí.

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cos \\ \\ \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = -\ln|\cos x| + C$$

Další příklad je podobného typu ale místo $\frac{f'(x)}{f(x)}$ je typu $f'(x)\cdot f(x)$, ale postup bude analogický

5.

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

Další příklad je obecného typu $f(g(x))\cdot g'(x)$, pro $f=x^2, \quad g=\ln x$

6.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int u^2 \mathrm{d}u = \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

7.

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \frac{1}{x} \\ \\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int e^u \mathrm{d}u = -\int e^{\frac{1}{x}} + C$$

Tato kapitola by měla osvětlit základní použití substitučního pravidla, které je popsané v úvodní červené tabulce.

7.3 Příklady na úpravu výrazu nebo substituci - řešení

V této kapitole budeme pokračovat s využitím substituce, ale příklady budou méně intuitivní.

1.

$$\int \frac{2x+3}{2x+1} \mathrm{d}x$$

Zde se hodí u příkladů typu $\frac{ax+b}{cx+d}$ je vždy rozdělit do tvaru $A + \frac{B}{cx+d}$, protože ty víme jak zintegrovat, toto je možné i u polynomů vyšších řádů, uvidíme v příštím cvičení.

$$\int \frac{2x+3}{2x+1} \mathrm{d}x = \int \frac{2x+1+2}{2x+1} \mathrm{d}x = \int 1 + \frac{2}{2x+1} \mathrm{d}x = x + 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C = x + \ln(2x+1) + C$$

Kde jsem použil pravidla pro lineární substituci $\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b)$ proto ta $\frac{1}{2}$. Zase můžete vždy ověřit správnost pomocí derivace výsledku.

2.

$$\int \frac{x^2+1}{x-1} \mathrm{d}x = \int \frac{x^2-1+2}{x-1} \mathrm{d}x = \int \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} \mathrm{d}x = \int (x+1) + \frac{2}{x-1} \mathrm{d}x = \frac{(x+1)^2}{2} +$$

$$+ 2\ln(x-1) + C$$

3.

$$\int \frac{x}{2x^2+3} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = 2x^2+3 \\ \\ \mathrm{d}u = \frac{x}{4}\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{4} \ln(2x^2+3) + C$$

4.

$$\int x\sqrt{2-5x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = 2-5x \\ \\ \mathrm{d}u = -5\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{2-u}{5}\sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{-5} = -\frac{1}{25}\int 2u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}u = -\frac{1}{25}\left(\frac{4u^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5}\right)$$

$$= -\frac{1}{25}\left(\frac{4}{3}(2-5x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{2}{375}\,(2-5x)^{\frac{3}{2}}\,(10-3(2-5x)) =$$

$$= -\frac{2}{375}\,(2-5x)^{\frac{3}{2}}\,(15x+4))$$

5.

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int 1+\tan^2 x - 1\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,\mathrm{d}x = \tan x - x + C$$

6.

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

Zde máme dvě možnosti:

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ \\ \mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$-\cot x - \int \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C$$

Nebo využijeme vztahu $1+\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ a dostaneme

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Zde se dostaneme k dobré poučce, pokud zjistíte že vám vyšel integrál jinak než někomu jinému ještě to neznamená, že to máte špatně. Například zde se dá krátkým výpočtem zkontrolovat, že oba integrály jsou ve skutečnosti stejné, občas se stane, že se budou lišit například o konstantu což je naprosto v pořádku.

7.

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ \\ \mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\arctan(\cos x) + C$$

8.

$$\int \cos x e^{\sin x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ \\ \mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x \end{array} \right| = e^{\sin x} + C$$

9.

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \ln u \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{u} \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{1}{u + u^{-1}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{1}{1 + u^2} \mathrm{d}u = \arctan(e^x) + C$$

Zde jsme poprvé zapsali substituci ve tvaru $x = f(u)$, což je také v pořádku, alespoň pro funkce které mají inverzní funkci. Všimněte si, že jsme mohli substituci udělat také ve tvaru

$$\left| \begin{array}{c} u = e^x \\ \\ \mathrm{d}u = e^x \mathrm{d}x \end{array} \right|$$

Ale pak by nebylo na první pohled jasné jak změnit diferenciál. Zde jsem vám chtěl ukázat, že je jedno jak substituci děláte, používáte-li invertovatelné funkce.

10.

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \sin x - \cos x \\ \\ \mathrm{d}u = (\cos x + \sin x)\, \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u = 2\sqrt{\sin x - \cos x} + C$$

11.

$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x$$

Dobrá pomůcka k výpočtu goniometrických integrálu je výraz upravit tak aby obsahoval obě funkce $\sin x$ i $\cos x$ a poté použít substituci, jako jsme to udělali v příkladě 6. a 7. Tento a následující dva příklady to také prokáží.

$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \int \sin x \left(1 - \cos^2 x\right) \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ \\ \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int (1-u^2) \mathrm{d}u = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$$

12.

$$\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x$$

Zde podobně jako u 6. příkladu máme dvě možnosti

$$\int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cos x \\ \\ \mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1}{1 - u^2} \mathrm{d}u$$

Zde se poprvé setkáme s takzvaným rozkladem na parciální zlomky. Neumíme integrovat zlomky kde je ve jmenovateli druhá mocnina, ale zlomky s první mocninou ve jmenovateli umíme ty se integrují na logaritmy. Naštěstí lze jedny převést na druhé, ukážeme si něco co vypadá jako "obrácené převedení na společný jmenovatel".

Uděláme takzvaný "ansatz", tedy napíšeme něco co doufáme, že platí. Použijeme obecné parametry a pak zpětně parametry dopočítáme aby to co jsme napsali opravdu platilo.

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u}$$

Porovnáním obou zlomků dostaneme, že musí platit

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -A + B &= 0 \end{aligned}$$

Tedy $A = B = \frac{1}{2}$ a můžeme vyřešit náš integrál

$$-\int \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\left(-\ln(1-u)+\ln(1+u)\right) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+C$$

To, že se poslední dva výrazy skutečně rovnají je dobrý trénink na počítání s elementárními funkcemi.

Druhý způsob je znovu využití goniometrických vztahů a to konkrétně $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$, což nám pomůže protože s využitím toho, že $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = -\int \frac{-1}{\sin^2 x}\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \cot x \\ \\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u =$$

$$= -\ln(u+\sqrt{1+u^2}) + C = -\ln\left(\cot x + \frac{1}{\sin x}\right) + C$$

Kde jsme v první úpravě převedli $\frac{1}{\sin x}$ do tvaru $f(g(x)) \cdot g'(x)$ tím, že jsme roznásobili jedničkou ve tvaru $\frac{1}{\sin x\sqrt{1+\cot^2 x}}$, ve třetím kroku jsme využili tabulkového integrálu, který si odvodíme později.

Znovu nechám na vás kontrolu toho, že výrazy které jsme dostali z metody 1 a 2 jsou stejné, můžete prvně provést kontrolu tak, že oba výrazy zderivujete a poté se pokusíte ukázat že jsou stejné.

Poslední příklad se dělá stejnou metodou jako předchozí, nechám ho tedy na vás, pokud vám to nepůjde neváhejte mi napsat nebo přijít na konzultaci. Ale výsledek tohoto integrálu jsme již potkali na předchozích cvičeních.

13.

$$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$$

7.4 Příklady na per partes

Budeme používat následující označení to co máme k dispozici označíme jako $\int uv'$ a tedy u budeme derivovat a v integrovat. V případě, že se v zadání nachází pouze jedna funkce bude vždy $v' = 1$. Postupujeme tak, že pokud je v zadání funkce jejíchž derivaci známe zvolíme ji jako u naopak je-li v zadání funkce, kterou snadno zintegrujeme zvolíme ji jako v'. Nebo také jinak podle zadání, bohužel u integrálů není žádné obecné pravidlo.

1.
$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = \tan x & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right| = x\tan x - \int \tan x \mathrm{d}x = x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

2.
$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \cos^2 x & u' = -\sin 2x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x\cos^2 x + \int x \sin 2x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x & v' = \sin 2x \end{array} \right| =$$
$$= x\cos^2 x - \frac{x}{2}\cos 2x + \int \frac{1}{2}\cos 2x \mathrm{d}x = x\cos^2 x - \frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$

Zde je z výsledku zřejmé, že jsme mohli spočítat integrál daleko jednodušeji využitím vzorce $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$

3.
$$\int \ln^2 x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \frac{2\ln x}{x} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x\ln^2 x - \int 2\ln x \mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

4.
$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) & u' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x =$$
$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}x = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

5.
$$\int \arcsin x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

6.

$$\int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin^2 x & u' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \arcsin^2 x - 2 \int \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = -\sqrt{1-x^2} & v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = x \arcsin^2 x + 2 \arcsin x \sqrt{1-x^2} - 2 \int 1 \mathrm{d}x =$$

$$= x \arcsin^2 x + 2 \arcsin x \sqrt{1-x^2} - 2x + C$$

7.

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = xe^x & u' = e^x(1+x) \\ v = -\frac{1}{1+x} & v' = \frac{1}{(1+x)^2} \end{array} \right| = -\frac{x}{1+x} e^x + \int e^x \mathrm{d}x = e^x \left(1 - \frac{x}{1+x} \right) + C =$$

$$= \frac{e^x}{1+x} + C$$

7.5 Složitější příklady: náročnější substituce nebo kombinace substituce a per partes - řešení

1.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = 2 - x \\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{(2-u)^2}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u = -\int \left(\frac{4}{\sqrt{u}} - \frac{4u}{\sqrt{u}} + \frac{u^2}{\sqrt{u}} \right) \mathrm{d}u =$$

$$= -8\sqrt{u} + \frac{8}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + C = -8\sqrt{2-x} + \frac{8}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} + C$$

2.

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = a \tan u \\ \mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 u} \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{1}{\left(a^2 \left(\tan^2 u + 1\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{a}{\cos^2 u} \mathrm{d}u = \int a^{(1-3)} \cos^{(3-2)} u \, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \cos u \mathrm{d}u = \frac{1}{a^2} \sin u + C = \frac{1}{a^2} \sin \arctan \frac{x}{a} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

3.

$$\int \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x=\sin^2 u \\ \\ \mathrm{d}x = \sin(2u)\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \sqrt{\sin^2 u(1-\sin^2 u)}\sin(2u)\mathrm{d}u = \int \sin u \cos u \sin(2u)\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin^2(2u)\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int (1-\cos(4u))\,\mathrm{d}u = \frac{u}{4} - \frac{\sin 4u}{16} + C$$

Teď musíme vyjádřit $\sin(4u)$ pomocí x což je $\sin^2 u$ abychom mohli vrátit substituci. Tedy

$$\sin(4u) = 2\sin(2u)\cos(2u) = 4\sin u\cos u\left(\cos^2 u - \sin^2 u\right) = 4\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}\left(1-\sin^2 u - \sin^2 u\right) =$$

$$= 4\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}\left(1-2\sin^2 u\right) = 4\sqrt{x}\sqrt{1-x}\,(1-2x)$$

A dostaneme pro náš integrál, že

$$\int \sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{x}\sqrt{1-x}\,(1-2x) + C$$

4.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x-a=(b-a)\sin^2 u \\ \\ \mathrm{d}x = (b-a)\sin(2u)\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{(b-a)\sin(2u)}{\sqrt{(b-a)\sin^2 u(b-a)(1-\sin^2 u)}}\mathrm{d}u =$$

$$= \int \frac{\sin(2u)}{\sqrt{\sin^2\cos^2 u}}\mathrm{d}u = \int 2\mathrm{d}u = 2u + C = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

5.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \sin x = u \\ \\ \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = \ln|u+\sqrt{1+u^2}| + C$$

6.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}$$

Zde si integrál rozdělíme na dva, jeden bude tabulkový a na druhý použijeme substituci.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{3}{x^2-4}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2-4=u \\ \\ 2\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u + 3\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x =$$

$$= \sqrt{u} + 3\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C = \sqrt{x^2-4} + 3\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$$

7.

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

Integrály tohoto typu můžeme řešit pomocí goniometrických nebo hyperbolických substitucí, zkusíme obě možnosti.

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sin u \\ \\ \mathrm{d}x = \cos u \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u \mathrm{d}u = \int \cos^2 u \mathrm{d}u = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C =$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Kde jsme využili výsledku předchozí podkapitolu ohledně integrálu $\int \cos^2 \mathrm{d}u$

8.

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Zde vidíme, že nám substituce goniometrickou funkcí nepomůže protože máme uvnitř integrálu $1+x^2$ což nelze zjednodušit pomocí goniometrické jedničky $\sin^2 + \cos^2 = 1$ co potřebujeme je právě hyperbolická substituce $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, uvidíme jak to vyjde

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \sinh u \\ \\ \mathrm{d}x = \cosh u \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \sqrt{1+\sinh^2 u}\cosh u \,\mathrm{d}u = \int \cosh^2 u \mathrm{d}u$$

Můžete si ověřit, že pro hyperbolické funkce platí podobné vztahy jako pro funkce goniometrické, hlavně $\cosh^2 u = \frac{1+\cosh(2u)}{2}$ a $\sinh(2u) = 2\sinh u \cosh u$, tedy můžeme spočítat náš integrál

$$\int \cosh^2 u \mathrm{d}u = \int \frac{1+\cosh(2u)}{2}\mathrm{d}u = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2u + C = \frac{1}{2}\sinh^{-1}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}$$

Dostaneme, stejný výsledek akorát s funkcí $\sinh^{-1}(x)$ místo $\arcsin x$.

9.

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ \\ 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| = 2\int te^t \mathrm{d}t = 2e^t(t-1) = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) + C$$

Kde jsme znovu využili výsledku minulé kapitoly.

10.

$$\int x \arcsin x^2 \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \arcsin t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2} + t \arcsin t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^4} + x^2 \arcsin x^2\right)$$

Znovu jsme využili výsledku minulé kapitoly.

11.

$$\int \frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = t^2 \\ \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t^4+t^2+1}{t^2+t}\, 2t\, \mathrm{d}t = 2\int \frac{t^4+t^2+1}{t+1}\, \mathrm{d}t =$$

$$= 2\int \left(t^3 - t^2 + t + \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t = 2\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \ln|1+t|\right) + C =$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x}{2} + \ln|1+\sqrt{x}|\right) + C$$

Kde jsem využili rozklad polynomu, který budeme více probírat příště.

12.

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}} = \left| \begin{array}{c} x^2 = u \\ \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})+C = \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})+C$$

13.

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \tan u \\ \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2}\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\tan^2 u}{\left(1+\tan^2 x\right)^2}\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int \tan^2 u \cos^2 u \mathrm{d}u = \int \sin^2 u \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin(2u) + C = \frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{4}2\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\arctan x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

Kde jsme využili goniometrických vztahů mezi sin, cos a tan.

14.

$$\int \frac{x^2}{9-x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{-(9-x^2)+9}{9-x^2}\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{9}{9-x^2}\mathrm{d}x = -x + \int \frac{9}{(3-x)(3+x)}\mathrm{d}x =$$

$$= -x + \int \frac{3}{2(3+x)} + \frac{3}{2(3-x)}\mathrm{d}x = -x + \frac{3}{2}\ln|3+x| - \frac{3}{2}\ln|3-x| + C$$

Kde jsme znovu použili rozklad na parciální zlomky, který budeme více řešit příště, můžete si sami ověřit, že to co je výše napsané je pravda.

Prosím, pokud najdete nějaké chyby nebo překlepy napište mi mail, je dost možné že zde nějaké jsou přeci jen je to celkem hodně příkladů. Děkuji a hodně štěstí s počítáním.