1 Určete součet geometrické posloupnosti $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$. Pomůže Vám k tomu toto schéma:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & +q & +q^2 & +\cdots & +q^{n-1} & & = S, \\ & q & +q^2 & +\cdots & +q^{n-1} & +q^n & = qS. \end{array}$$

2 Kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tvoří aritmetickou posloupnost. Dokažte, že platí:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$;
2. $\dfrac{1}{a_1 a_2} + \dfrac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1} a_n} = \dfrac{n-1}{a_1 a_n}$.

3 Dokažte, že čísla 49, 4489, 444889 atd., kde každé další číslo vznikne vložením číslic 48 doprostřed předchozího čísla, jsou čtverci (druhými mocninami) celých čísel. (Bude se Vám hodit vyjádřit čísla 444...4 a 888...8 jako součet geometrické posloupnosti.)

4 Zapište následující polynomy jako součin dvou kvadratických nerozložitelných trojčlenů:
1. $x^4 + a^4$; **2.** $x^4 + a^2x^2 + a^4$.
(U toho prvního zkuste přičíst a odečíst $2a^2x^2$.)

5 Dokažte, že pokud pro reálná čísla a, b, c platí rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca,$$

musí být $a = b = c$.

6 Zkuste ukázat, že $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ právě tehdy, když je buď $a + b + c = 0$, nebo $a = b = c$. (Mně se osvědčilo začít rozepsáním $(a + b + c)^3$.) Pak toho využijte k důkazu, že

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

7 Nalezněte všechny reálné hodnoty x a y, které vyhoví rovnici

$$x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0.$$

8 Řešte rovnice:
1. $\sqrt[m]{(1 + x)^2} - \sqrt[m]{(1 - x)^2} = \sqrt[m]{1 - x^2}$; **2.** $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x + \sqrt{x}}}$.

9 Papíry formátu An (tedy A0, A1, A2 atd.) mají tyto dvě vlastnosti:
1. Plocha papíru An je 2^{-n} metru čtverečního.
2. Pokud rozstřihneme papír formátu An v polovině delší strany, dostaneme dva papíry formátu A$(n+1)$.
Spočítejte z těchto dvou vlastností délky stran papíru formátu An. (Nejdřív zkuste použít druhou vlastnost a zjistit, jaký poměr stran musí tyto papíry mít.)

10 Dokažte, že pro dvě kladná čísla x_1 a x_2 platí A-G nerovnost:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Zvládli byste z toho pak pokračovat indukcí a dokázat, že pro libovolný počet čísel kladných čísel platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}?$$

11 Na řece mezi body A a B je proud tak slabý, že se dá jeho rychlost zanedbat; dále mezi body B a C už je ale tok silný. Loďka se dostane z A do C (po proudu) za 6 hodin a zpátky z C do A (proti proudu) za 7 hodin. Kdyby mezi A a B tekla řeka stejně rychle jako mezi B a C, zabrala by cesta z A do C jen 5,5 hodiny. Kolik času by v tom případě bylo potřeba na opačnou cestu z C do A?

12 V lese je a stromů. Každého roku se jejich počet zvětší na q-násobek ($q > 1$). Kolik stromů můžeme každou zimu vykácet, jestliže chceme, aby po n letech bylo v lese k-krát víc stromů než na začátku?

13 V jakési nádobě máme nalitý p-procentní roztok lihu. Vylijeme odtamtud roztok o objemu a a naopak přidáme stejné množství q-procentního roztoku ($q < p$). Tuto proceduru zopakujeme ještě $k-1$-krát (tedy k-krát dohromady) a potom zjistíme, že v nádobě je r-procentní roztok. Jaký je objem roztoku?

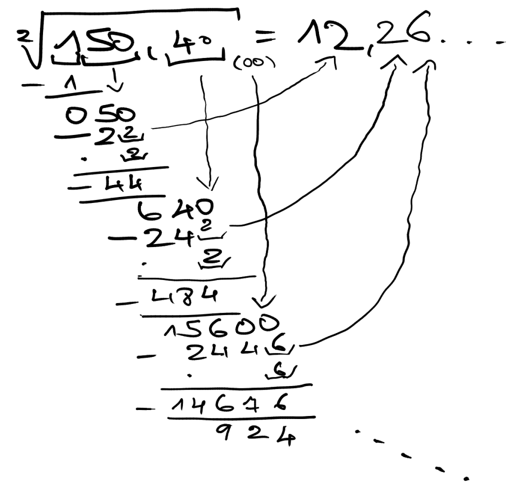
14 Zjednodušte součiny:

1. $(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)\cdots(x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}})$; **2.** $(x^2-ax+a^2)(x^4-a^2x^2+a^4)\cdots(x^{2^n}-a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n})$.
(Obojí se snadno poddá, když to rozšíříte nějakým šikovným činitelem, aby šel použít vztah pro rozdíl čtverců.)

15 Dokažte, že pokud pro reálná a_k, b_k, p, q (přičemž $p \neq 0$, $q \neq 0$) platí vztahy

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = p^2,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = q^2,$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = pq,$$

pak musí platit $a_1 = \frac{p}{q}b_1$, $a_2 = \frac{p}{q}b_2$, atd., až $a_n = \frac{p}{q}b_n$.



16 V této úloze Vám představím jeden starý algoritmus na odmocňování, který si vystačí s papírem a tužkou. Sledujte to trochu na obrázku vpravo, kde odmocňuji číslo 150,4.

Odmocňované číslo rozdělím na skupiny po dvou číslicích (přičemž jdu na obě strany od desetinné čárky). Takže v našem příkladě rozdělím číslo jako 1 50, 40. Začnu tím, že vezmu první skupinu, najdu k ní nejbližší nižší nebo stejný čtverec celého čísla n^2 a n pak zapíšu jako číslici do výsledku. (V našem případě je to jednoduché, protože $1^2 = 1$, a tak píšeme jedničku do výsledku.) Čtverec pak odečteme (tedy nám zůstane $1 - 1 = 0$).

Odteď budeme provádět několik kroků stále dokolečka:

1. Sepíšeme další dvojčíslí na konec předchozího zbytku. (Měli jsme zbytek 0, sepíšeme 50, takže máme pořád 50.) Vznikne číslo, které označíme Z.
2. Pod to napíšeme dvojnásobek dosavadního výsledku (bez desetinné čárky), na jehož konci necháme ještě místo na jednu číslici. To budeme násobit jednou číslicí, na kterou si též necháme místo. (Zatím máme výsledek 1, takže píšeme součin 2_×_, kde _ je volné místo.)
3. Na obě volná místa v předchozím součinu doplníme stejnou číslici. Musí být co největší, ale taková, aby součin ještě nepřekročil Z. (V našem případě nechceme překročit 50. 23×3 je už moc, ale 22×2 = 44 je menší než 50. Proto ta naše číslice je 2.) Tuto číslici napíšeme do výsledku.
4. Provedeme součin s doplněnou číslicí (22×2 = 44) a odečteme to od Z. ($50 - 44 = 6$.) Tím vznikne další zbytek.

Pokud by Vám to nebylo jasné, klidně na mě zavolejte a já Vám to ukážu naživo. Na papíře se to špatně vysvětluje.

Vaše úkoly:

1. Vypočtěte $\sqrt{3}$ na 8 platných číslic (všimnete si, že to trvá asi tak pět minut, což není nijak moc, když uvážíte, že odmocňování je velmi komplikovaná operace a Vy ji děláte jen s papírem a tužkou).
2. Vysvětlete, proč to funguje. Dokažte, že každá číslice výsledku získaného touto metodou je správná.
3. Pokud se cítíte drsně, zkuste navrhnout podobnou metodu i pro počítání třetí odmocniny (ta je ale mnohem nechutnější).