

I Ukažte, že pro všechna x reálná platí $(-x)^2 = x^2$. Budete pak souhlasit i s tím, že $|x|^2 = x^2$?

2 Přesvědčte svého souseda, že druhá mocnina jakéhokoli reálného čísla je nezáporná. Tedy že $x^2 \geq 0$ pro jakékoli x reálné.

3 Dokažte, že platí vztah $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Zvládli byste to ilustrovat i obrázkem? (Zkuste to pomocí ploch: ab je plocha obdélníka o stranách a a b .)

4 A čemu se rovná $(a - b)^2$? Dovedete to odvodit z předchozího vztahu, aniž byste museli znova roznásobovat závorky?

5 Potřebujeme ještě další vztahy pro $(-a + b)^2$ a $(-a - b)^2$? Čemu se tyto výrazy rovnají?

6 Když je pro každé x reálné $x^2 \geq 0$, bude také platit $(x - 1)^2 \geq 0$? A co takhle $x^2 + 1 \geq 2x$?



7 Ověřte si (třeba pomocí vzorce z úlohy 3), že se dá psát:

1. $x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 3$; 2. $x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3$; 3. $2x^2 - 4x = 2(x - 1)^2 - 2$;

4. $-x^2 + 3x + 1 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$.

Přepsání do takového tvaru se říká „doplnění na (úplný) čtverec“.

8 Sami zkuste do tohoto tvaru přepsat následující polynomy:

1. $x^2 - 6x + 8$; 2. $-x^2 - 9$; 3. $-2x^2 + 3x - 5$; 4. Troufnete si převést i obecný kvadratický polynom $x^2 + bx + c$ (b, c jsou jakákoli reálná čísla)?

9 Uměli byste s pomocí doplnění na čtverec ukázat, že je $x^2 + 4x + 7 \geq 3$ a taky $-x^2 + 3x + 1 \leq \frac{13}{4}$? (Pomůže Vám úloha 7.)

10 Může se stát, že by kvadratický polynom $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) nabýval všech reálných hodnot? Proč ano nebo proč ne?



11 Ubezpečte se, že rovnice $x^2 = 4$ má dvě řešení: $+2$ a -2 .

12 Zkuste řešit následující rovnice:

1. $(x - 1)^2 = 9$; 2. $(x + 2)^2 = 1$; 3. $(x - 4)^2 = 0$; 4. $(x + 1)^2 + 3 = 0$.

Na čem závisí, kolik má která taková rovnice řešení? (Z předchozí úlohy vidíte, že některé takové rovnice mohou mít dvě řešení. Mohou mít některé víc řešení? A méně?)

13 Zvládli byste doplněním na čtverec vyřešit libovolnou kvadratickou rovnici $x^2 + ax + b = 0$? Bude to snadné, pokud jste si v úloze 8 doplnili na čtverec obecný polynom. Kolik může mít taková rovnice reálných řešení? Na čem to závisí?



14 Zkuste podobně dokázat, že platí $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (dokážete k tomu nakreslit i obrázek?) a $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ (tady už se o obrázek nesnažte 😊).

15 Vidíte v předchozích vzorcích nějaký systém? Zvládli byste to zobecnit na obecnou přirozenou mocninu? Napovím Vám, že veličina $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ označuje počet způsobů, kterými lze vybrat k věcí z celkem n věcí bez ohledu na pořadí.



16 Ukažte, že $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Šel by k tomu taky nakreslit obrázek podobně jako v úloze 3?

17 A co takhle $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$? Půjde podobně rozložit i $a^3 + b^3$? A co $a^2 + b^2$?

18 Uměli byste ukázat $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$? (Zkuste zlomek rozšířit tak, aby šel použít vztah pro $a^2 - b^2$. Tím se odmocniny ve jmenovateli zbavíte.)

19 Naložte podobně s těmito zlomky (odstraňte všechny odmocniny ze jmenovatelů):

1. $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$; 2. $\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$; 3. $\frac{\sqrt{39}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$; 4. $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Pro tuhle proceduru existuje malebný český název: *usměrnění zlomku*.

20 Když chcete umocnit na druhou číslo končící pětkou, funguje tento trik: vynásobíte obě dvě okolní celé desítky mezi sebou a přičtete 25. Tak třeba: $55^2 = 50 \cdot 60 + 25 = 3025$ (můžete si to ověřit třeba na kalkulačce ☺). Zvládnete vysvětlit, proč to funguje? A uměli byste vyčíslit podobnou metodou i čtverce jiných čísel?

21 Ve starém Babyloně se násobilo pomocí tabulek čtverců. Představte si, že máte vypsané druhé mocniny přirozených čísel od 1 do 100. Jak se dají pomocí této tabulky (a trochy sčítání a odčítání) vynásobit jakákoli dvě dvouciferná přirozená čísla?



Odmocnina z reálného čísla x (kterou označíme \sqrt{x}) je takové $R \geq 0$, pro které platí $R^2 = x$.

22 Z definice, kterou jsem dal do rámečku, je jasné, že \sqrt{x} je vždy nezáporná (pokud vůbec existuje). Dává ovšem smysl dělat odmocninu ze všech reálných čísel? Nebo to u některých smysl nedává? (Vizte úlohu 2.)

23 Je vidět, že odmocnina a druhá mocnina se „tak nějak“ ruší navzájem. Ale jak je to přesně?
1. Kdy dává výraz $\sqrt{x^2}$ smysl a čemu je pak roven? 2. Kdy dává smysl výraz $(\sqrt{x})^2$ a čemu je roven?

24 Často funguje vztah $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$. Zkuste si ho dokázat. Myslíte, že se může někdy pokazit?

25 Pepíček odmocňuje, ale jelikož moc nedával pozor, tak to docela popletl. Počítal takhle: $5 = \sqrt{25} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$. Kde udělal chybu? Dokážete mu vysvětlit, proč je ten špatný krok špatně? Jak je vidět, Pepíček není žádný počtář. Dovedli byste mu pomoci obrázkem?



26 Zkuste co nejvíc upravit výrazy:

1. $\frac{1}{1 + r + \sqrt{r^2 + 1}} + \frac{1}{1 - r + \sqrt{r^2 + 1}}$; 2. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \left(\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \sqrt{ab} \right)$;
3. $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$; 4. $\frac{4x^2}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{(x-2)^2}}$.

27 Zkuste vyřešit rovnici $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 1$. Nezapomeňte, že pokud rovnici budete umocňovat, nejde o ekvivalentní úpravu a mohou se Vám kvůli tomu objevit „falešné“ kořeny. Proto je potřeba provést s každým řešením, které najdete, ještě zkoušku.