

I Protože už umíme rozklady v parciální zlomky a jednoduché substituce, můžeme (v principu) integrovat jakoukoli racionální lomenou funkci prostě tak, že integrand rozložíme v parciální zlomky. Každý ten zlomek se pak už integruje celkem snadno (aspoň většinou...) Zkuste si to:

$$1. \int \frac{dx}{(x-3)(x+7)}; \quad 2. \int \frac{x+1}{(x^2-4)(x+3)} dx; \quad 3. \int \frac{dx}{(x^2-9)^2}; \quad 4. \int \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)};$$

$$5. \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)}; \quad 6. \int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)}; \quad 7. \int \frac{dx}{x^3+1}.$$

P. S.: Jde vesměs o zlomky, které jste rozkládali minule, takže stojí za to se kouknout, které z nich jste už udělali. Ale na řešení v ISu se prosím nedívejte :-).

2 Pokud zbude čas: Někdy se při rozkladu v parciální zlomky objeví zlomek, který má ve jmenovateli druhou (nebo i vyšší) mocninu nerozložitelného trojčlenu. To je jediný případ, který se integruje nepříjemně. Na přednášce je na to magická rekurence, ale můžete zkusit i něco jiného. Nejdřív vypočtete integrál

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (a, b, c \text{ jsou konstanty, } 4ac \geq b^2)$$

a pak ho několikrát derivujte podle c . Co se stane?



3 Zkuste spočítat následující goniometrické integrály:

$$1. \int \sin^4 x \cos x dx; \quad 2. \int \sin^3 x \cos^2 x dx; \quad 3. \int \frac{dx}{\sin x}; \quad 4. \int \frac{dx}{\cos x \sqrt{\sin^2 x}}.$$

Není potřeba v tom hledat složitosti, všechny tři se dají vyřešit substitucí $u = \sin x$ nebo $u = \cos x$. V posledním příkladě zkuste rozšířit $\sin x$.

4 Asi jste si už všimli, že v minulé úloze se integrovalo pěkně proto, že sinus byl v liché mocnině a kosinus v sudé, nebo opačně. Ale když budou oba v sudé či oba v liché mocnině, tento postup se rozbije a budeme muset vymyslet něco jiného. Na pár možných triků se koukneme v této úloze:

$$1. \text{ Integrací per partes dokažte } (n \geq 2): \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

2. Vyjádřete $\sin^2 x$ a $\cos^2 x$ pouze pomocí $\tan x$. Použijte to k přepsání integrálu $\int \sin^{2n} x dx$ na racionální lomenou funkci.

3. Vzpomínáte si ještě na to, že platí $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ a $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$? Umocněte obě strany té první rovnosti na čtvrtou, rozložte pravou stranu podle binomické věty a posbírejte jednotlivé členy tak, aby vytvořily kosiny. Měli byste dostat $\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$.

Pomocí všech tří triků spočtete $\int \sin^4 x dx$. U toho druhého stačí, když to dovedete k integrálu z racionální lomené funkce.

5 Integrály s odmocninami se často dají pěkně vyřešit pomocí goniometrické substituce, protože $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ (a podobně i pro $\sin x$). Zkuste si to na těchto příkladech:

$$1. \int \sqrt{1 - x^2} dx; \quad 2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad 3. \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; \quad 4. \int \sqrt{x(1-x)} dx; \quad 5. \int \frac{\sqrt{x(1+x)} dx}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}.$$

U posledního bodu se bude hodit vložit nějakou hyperbolickou funkci. Pamatujte, že $1 + \text{sh}^2 x = \text{ch}^2 x$.

6 Kvadratické výrazy někdy bývají „maskované“ a je potřeba je nejdřív doplnit na úplný čtverec. Zkuste si to na následujících integrálech:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}; \quad 2. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}}.$$

7 Pokud zbude čas: Spočítejte integrál $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Na to je dobré vytknout z celé odmocniny

x^2 . Tím integrand přejde na $\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^{-2}}}$, v čemž můžete snadno položit $x = 1/u$. Pokud Vám ještě pořád zbývá čas, zkuste spočítat i $\int \frac{x dx}{(x+1)\sqrt{1-x-x^2}}$.



8 Spočtěte následující určité integrály:

1. $\int_0^5 x^2 dx$; 2. $\int_0^{2\pi} \sin x dx$; 3. $\int_0^{2\pi} \cos x dx$; 4. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$; 5. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
 6. $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ (zkuste $x = \cos 2u$); 7. $\int_0^1 \ln x dx$; 8. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ (zkuste $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$).

9 A co tyto integrály s nekonečnými mezemi?

1. $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$; 2. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; 3. $\int_0^{\infty} \sin x dx$; 4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 5. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$.

10 Pokud zbude čas: Vyzkoušejte si ještě per partes na těchto integrálech (a pozor, musí se udělat hodněkrát!) n je přirozené číslo.

1. $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$; 2. $\int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}}$.