Osmé cvičení (další neurčité integrály)

Integrace racionálních funkcí

Parciální zlomky

Pro připomenutí: každý polynom s reálnými koeficienty lze zapsat jako součin závorek ve tvaru $(x-a_k)^{n_k}$ a závorek ve tvaru $(x^2+b_kx+c_k)^{\ell_k}$. Chceme-li rozkládat zlomek $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P má menší stupeň než Q, na součet parciálních zlomků, postupujeme takto:

1. Rozložíme Q na součin závorek, jak je to popsáno výše.
2. Za každou závorku ve tvaru $(x-a)^n$ zapíšeme do součtu zlomky $\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}$ (A_k jsou neznámé koeficienty, u každého zlomku jiné).
3. Za každou závorku ve tvaru $(x^2+bx+c)^n$ zapíšeme do součtu zlomky $\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$.
4. Tím jsme získali výsledný rozklad, až na to, že v něm vystupují nějaké neznámé koeficienty. Ty určíme tak, že celý součet opět dáme na společného jmenovatele a srovnáme jeho čitatel s $P(x)$.

To je aspoň učebnicový postup. Já Vám ovšem hned v další úloze předvedu něco lepšího.

92 Má-li jmenovatel zlomku jen jednoduché kořeny, lze psát $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ a rozklad tohoto zlomku lze psát ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

Ukažte, že v tomto případě pro neznámé koeficienty A_k platí vzorce

$$A_k=\lim_{x\to a_k}\frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)}=\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.$$

Nápověda: Násobte obě strany $x-a_k$ a vemte limitu $x\to a_k$.

93 Upozorňuji ještě jednou, že vzorec výše funguje **pouze v případě, že jmenovatel zlomku má jen jednoduché kořeny**. Zkuste vymyslet, jak by šlo tuto metodu vylepšit, aby fungovala i v případě, že:
1. jmenovatel má i vícenásobné kořeny; **2.** jmenovatel obsahuje nerozložitelné kvadratické trojčleny.

94 Rozložte v parciální zlomky:

1. $\frac{1}{x^2-1}$; **2.** $\frac{1}{x(x-1)(x-2)}$; **3.** $\frac{1}{x^3+2x^2+x}$; **4.** $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

95 Rozložením integrandu v parciální zlomky spočtěte následující integrály:

1. $\int\frac{dx}{x^3+1}$; **2.** $\int\frac{dx}{x^4+1}$; **3.** $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; **4.** $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx$; **5.** $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$.

96 Rozličnými postupy spočtěte tyto integrály:

1. $\int\frac{(2x+1)\,dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$; **2.** $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx$; **3.** $\int\frac{x^3\,dx}{(x-1)^{100}}$; **4.** $\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$. **Nápověda: Ad 4.** $u=\frac{x+a}{x+b}$

97 Derivováním za znamením integrálu (nejlépe podle parametru c) spočtěte

$$\int\frac{dx}{(x^2+2bx+c)^2}\qquad(b^2-c<0).$$

Integrace výrazů s odmocninami

98 Vhodnými úpravami a substitucemi spočtěte následující integrály:

1. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; **2.** $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}$; **3.** $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$; **4.** $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$; **5.** $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$.

Vzpomeňte si na trik, který jsme použili na cvičení: integrál typu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ jsme přepsali na $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a+bu+cu^2}}$, kde $u = 1/x$. To se bude v následujícím cvičení často hodit.

99 Spočítejte následující integrály s kvadratickými výrazy pod odmocninou:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$.

100 Užitím přiměřené substituce převeďte následující integrály na integrál z racionální funkce (ten už nedopočítávejte):

1. $\displaystyle\int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; **3.** $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x$.

Goniometrické integrály

101 Vyčíslete integrály:

1. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^4 x}$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$; **5.** $\displaystyle\int \sin 5x\cos x\,\mathrm{d}x$; **6.** $\displaystyle\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$;

7. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\operatorname{tg}(x+a)\,\mathrm{d}x$; **8.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3+5\operatorname{tg} x}$.

102 Jakýkoli integrál, který je racionální funkcí sinů a kosinů (a tedy i tangent a kotangent), se dá převést na racionální lomenou funkci (tedy podíl dvou polynomů) uplatněním substituce $u = \operatorname{tg} x/2$. Jak se při této substituci dají následující veličiny vyjádřit pouze pomocí u?

1. $\mathrm{d}x$; **2.** $\sin x$; **3.** $\cos x$; **4.** $\operatorname{tg} x$.

103 S pomocí universální substituce $\operatorname{tg} x/2 = u$ spočtěte tyto integrály:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ $(0<b<a)$; **2.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}$ $(c^2>a^2+b^2)$; **3.** $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Jiné rozličné integrály

104 Pomocí integrace per partes okažte, že platí (n je přirozené číslo):

1. $\displaystyle\int x^n e^x\,\mathrm{d}x = C+(-1)^n n!e^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{x^n} = C-\frac{\operatorname{li}(e^x)}{(n-1)!}-\frac{1}{(n-1)!}e^x\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!}{x^k}$, přičemž značíme $\displaystyle\operatorname{li} x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

105 Vypočtěte následující integrály s exponenciálou:

1. $\displaystyle\int x^3e^{3x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int x^7e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int x^2e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{1+e^x}$; **5.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$; **6.** $\displaystyle\int xe^x\sin x\,\mathrm{d}x$;

7. $\displaystyle\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$; **8.** $\displaystyle\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

106 Nakonec nabízím ještě várku nejroztodivnějších dalších integrálů. Poradíte si s nimi?

1. $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}(x+1)\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int \ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}$;

5. $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)\mathrm{d}x$; **6.** $\displaystyle\int x\arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; **7.** $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$; **8.** $\displaystyle\int \sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$.

Odpovědi a řešení

92. Zařídíme se přesně podle nápovědy: rovnost $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{x-a_1} + \dfrac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \dfrac{A_n}{x-a_n}$ vynásobíme $x - a_k$ (pro nějaké a_k) a vezmeme limitu $x \to a_k$. Každý sčítanec $\dfrac{A_\ell}{x-a_\ell}$ přejde na $\lim\limits_{x\to a_k} \dfrac{A_\ell(x-a_k)}{x-a_\ell}$. Jenomže všechna a jsou navzájem různá, a tak při $\ell \neq k$ jde tato limita k $\dfrac{A_\ell(a_k-a_k)}{a_k-a\ell} = \dfrac{0}{\text{něco nenulového}} = 0$. Proto všechny sčítance vpravo vypadnou, jen ten s a_k zůstane. Ten přejde na $\lim\limits_{x\to a_k} \dfrac{A_k(x-a_k)}{x-a_k} = A_k$. No a vlevo provedeme totéž, takže dostaneme $\lim\limits_{x\to a_k} \dfrac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)}$. Jelikož a_k je pak a_k kořenem $Q(x)$, platí $Q(a_k) = 0$, a tak lze rovněž psát $\lim\limits_{x\to a_k} \dfrac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to a_k} \dfrac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)-Q(a_k)}$. $P(x)$ můžeme dát před limitu a zůstane definice derivace, jenom v převrácené hodnotě, takže skutečně dostaneme $A_k = \dfrac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$.

93. Jsou různé možnosti. Zde popíšu jenom to, co většinou nejvíc vyhovuje mně. **Ad 1.** Tady použijeme to, že $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\dfrac{1}{x-a} = \dfrac{(n-1)!}{(x-a)^n}$. Proto můžeme každý násobný kořen přepsat jako $\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\dfrac{1}{x-a}$, kde pak za a dosadíme příslušné číslo. Třeba $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\dfrac{1}{(x-a)(x-1)}\right]_{a=-1} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\dfrac{1}{a-1}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x-1}\right)\right]_{a=-1} = \left[-\dfrac{1}{(a-1)^2}\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{a-1}\dfrac{1}{(x-a)^2} + \dfrac{1}{(a-1)^2}\dfrac{1}{x-1}\right]_{a=-1} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x-1}$. **Ad 2.** Kvadratický trojčlen se objeví, protože polynom má dva nereálné navzájem komplexně sdružené kořeny z a $z^\star$. Pokud jsou tyto kořeny jednoduché, tak se pro ně v rozvoji objeví patřičné sčítance, tj. $\dfrac{A}{x-z} + \dfrac{B}{x-z^\star}$. Protože je polynom reálný, nesmí se měnit při komplexním sdružení, a proto se ani tento součet nesmí změnit. Má tedy být $\dfrac{A}{x-z} + \dfrac{B}{x-z^\star} = \dfrac{B^\star}{x-z} + \dfrac{A^\star}{x-z^\star}$, takže má být $B = A^\star$. Proto je výsledný sčítanec roven $2\,\mathfrak{Re}\,\dfrac{A}{x-z}$. Má-li kvadratický trojčlen tvar $x^2 + 2ax + b = (x-z)(x-z^\star)$, vidíme, že lze psát $z = -a + \mathrm{i}\sqrt{b-a^2}$, takže nakonec je příslušný sčítanec roven $2\dfrac{\mathfrak{Re}[A(x-z^\star)]}{x^2+ax+b}$. Pokud jsou komplexní kořeny násobné, lze násobnost odstranit podobně jako v předchozím bodě.

94. **Ad 1.** $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$. **Ad 2.** Užitím výsledku cvičení 92 hned dostáváme $\dfrac{1/2}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1/2}{x-2}$. **Ad 3.** $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x} = \dfrac{1}{x(x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$. Užitím podobné metody jako v úloze 92 zjistíme, že $A = 1$, $C = -1$. Zbývá už jen jeden sčítanec, takže ostatní od původního zlomku odečteme a dostaneme $\dfrac{1}{x(x+1)^2}\left[1-(x+1)^2+x\right] = -\dfrac{x^2+x}{x(x+1)^2} = -\dfrac{1}{x+1}$. To je ten zbývající sčítanec, takže rozvoj je $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$. **Ad 4.** Při $\dfrac{1}{x-1}$ musí stát koeficient $1/3$, takže to stačí odečíst a druhý člen rozvoje je $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\left(1 - \dfrac{x^2+x+1}{3}\right) = -\dfrac{(x-1)(x+2)}{3(x-1)(x^2+x+1)} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$. Celkem $\dfrac{1/3}{x-1} - \dfrac{1}{3}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$.

95. **Ad 1.** $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{1/3}{x+1} - \dfrac{x-2}{3(x^2-x+1)}$. To už můžeme integrovat na $\dfrac{1}{3}\ln|x+1| - \dfrac{1}{6}\displaystyle\int \dfrac{(2x-1-3)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$.

Tento poslední integrál rozdělíme na $\displaystyle\int \dfrac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \ln|x^2-x+1|$ a na $-3\displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = -2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Celkem máme $\dfrac{1}{3}\ln|x+1| - \dfrac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\,\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$. **Ad 2.** Vyjdeme z toho, že $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2-\sqrt{2}x+1)$. To je potřeba rozložit na parciální zlomky. Můžeme vyjít třeba z toho, že závorka s plusem má kořeny $\mathrm{e}^{\pm 3\pi\mathrm{i}/4}$ a ta s mínusem $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/4}$. Derivace jmenovatele je $4x^3$. Takže dostaneme $2\,\mathfrak{Re}\left[\dfrac{1}{4\mathrm{e}^{9\mathrm{i}\pi/4}}\dfrac{x-\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/4}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \dfrac{1}{4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}}\dfrac{x-\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right] = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$. To se musí integrovat. Integrál $\displaystyle\int \dfrac{x\pm\sqrt{2}}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$ můžeme přepsat jako $\frac{1}{2}\left[\displaystyle\int \dfrac{2x\pm\sqrt{2}}{x^2\pm\sqrt{2}x+1} \pm \sqrt{2}\displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\pm\sqrt{2}x+1}\right] = \dfrac{1}{2}\ln|x^2\pm\sqrt{2}x+1| \pm \mathrm{arctg}(\sqrt{2}x\pm 1)$. Celkem tedy máme $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\mathrm{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \mathrm{arctg}(\sqrt{2}x-1)\right] + C$.

Ad 3. Podle úlohy 92 vidíme, že u $\dfrac{1}{x+1}$ musí být $1/2$. To odečteme od původního zlomku a tím dostaneme druhý sčítanec. Celkem je tedy rozklad $\frac{1/2}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$. První člen se integruje na $\frac{1}{2}\ln|x+1|$, druhý se rozpadne na $-\frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. Po sečtení tedy máme $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$, což je výsledek. **Ad 4.** Rozložíme zlomek v závorce a dostaneme $\frac{x}{(x-2)(x-1)}=$ $=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}$. Proto je $\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2=\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x-2}$. Když to integrujeme dostaneme výsledek $4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x-2}+C$. **Ad 5.** Rozložíme $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$ na $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right]$, což se snadno integruje na $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C$.

96. **Ad 1.** Všimneme si, že $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ je reciproký polynom, tj. jakýsi palindrom (zepředu a zezadu má stejné koeficienty). U takových je vždycky dobrý nápad vytknout a převést na jiný polynom v proměnné $x+\frac{1}{x}$. Když to uděláme, zjistíme, že je ten polynom roven $x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right]=x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right]=x^2\left[x+\frac{1}{x}+1\right]^2=(x^2+x+1)^2$. Takže máme spočítat $\int\frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$, což už je přímo nachystané na substituci. Tu uděláme a dostaneme výsledek $C-\frac{1}{x^2+x+1}$. **Ad 2.** Tady je potřeba položit $x^7=u$. Jenže to budeme potřebovat x^6 v čitateli. Naštěstí po rozšíření dostaneme $\frac{1}{7}\int\frac{1-x^7}{x^7(1+x^7)}7x^6\,\mathrm{d}x$, což je na tu substituci jako dělané. Po jejím provedení dostaneme $\frac{1}{7}\int\frac{1-u}{u(1+u)}=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{(1+x^7)^2}\right|+C$. **Ad 3.** Prostě přerozložíme x^3 tak, aby se přizpůsobilo tomu $x-1$ ve jmenovateli. Napíšeme $x^3=[(x-1)+1]^3=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+3$. Po vložení do integrálu se integrál rozpadne na součet a snadno už dostaneme výsledek $-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C$. **Ad 4.** Zařídíme se podle nápovědy. U této substituce platí $\mathrm{d}u=\frac{b-a}{(x+b)^2}\mathrm{d}x$, $x+a=\frac{(b-a)u}{1-u}$ a $x+b=\frac{b-a}{1-u}$. Integrál přepíšeme takto: $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^m(x+b)^n}=\frac{1}{b-a}\int\frac{(b-a)\,\mathrm{d}x}{(x+b)^2}\frac{1}{(x+a)^m(x+b)^{n-2}}$. Teď můžeme vložit substituci a integrál přejde na $\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\cdot$ $\cdot\int\frac{(1-u)^{m+n-2}\,\mathrm{d}u}{u^m}$. Integrace je teď už snadná, stačí rozepsat závorku v čitateli podle binomické věty a ze sumy oddělit ten člen, kde se bude integrovat $1/u$ (to totiž dá logaritmus a ne mocninu). Výsledek: $\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\left[\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m+n-2}{k}\frac{(-1)^k}{k-m+1}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{k-m+1}-\right.$ $\left.-(-1)^m\binom{m+n-2}{m-1}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+(-1)^m\sum_{\ell=0}^{n-2}\binom{m+n-2}{m+\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell+1}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{\ell+1}\right]+C.$

97. Označme $D=c-b^2>0$ a počítejme $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2bx+c}$. Doplněním na čtverec se ve jmenovateli objeví $(x+b)^2+c-b^2=(x+b)^2+$ $+D$, takže počítáme $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2+D}=\frac{1}{\sqrt{D}}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{\sqrt{D}}$. Jelikož platí $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2bx+c)^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2bx+c}$, stačí nám tento výsledek derivovat podle D a budeme mít spočítáno. Navíc, jelikož $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}c}=1$, můžeme psát $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}$ jako $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}$. Počítáme tedy $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}D}\left[\frac{1}{\sqrt{D}}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{\sqrt{D}}\right]$, což už je přímočaré a brzo obdržíme výsledek $\frac{1}{2D^{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{\sqrt{D}}+\frac{(x+b)/2D}{(x+b)^2+D}=\frac{1}{2(c-b^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}+$ $+\frac{1}{2(c-b^2)}\frac{x+b}{x^2+2bx+c}+C$.

98. **Ad 1.** Položme $x=u^2$, integrál přejde na $\int\frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u}=2u-2\ln|1+u|=2\sqrt{x}-2\ln|1+\sqrt{x}|+C$. **Ad 2.** Položíme $x=u^6$, inte-

grál přejde na $6\int\frac{u^5\,\mathrm{d}u}{u^3+u^2+u+1}$. Dělíme jako na základní škole, dostaneme $\frac{u^5}{u^3+u^2+u+1}=u^2-u+\frac{u}{(u+1)(u^2+1)}$. Posledně jmenovaný zlomek rozložíme na $\frac{1}{2}\frac{u+1}{u^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{u+1}$. To všechno se nakonec integruje na $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\ln\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt[6]{x}+\sqrt[3]{x}}+C$.
Ad 3. Rozšíříme $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$, ve jmenovateli se objeví dvojka a v čitateli $2x-2\sqrt{x^2-1}$. Tím jsme tedy integrál upravili na $\int(x-\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x$. Lepší bude ho zapsat jako $\int[2x-(x+\sqrt{x^2-1})]\,\mathrm{d}x$, první sčítanec integrovat na x^2 a v druhém položit $x=\operatorname{ch}\ln y$, $\mathrm{d}x=\frac{y-\frac{1}{y}}{2y}\mathrm{d}y$. Tak totiž dostaneme $y=x+\sqrt{x^2-1}$. Tím přejde druhý kus integrálu na $\frac{y^2}{4}-\frac{1}{2}\ln y$, což po dosazení y a sečtení s předchozím kusem dá $\frac{1}{2}\left[x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]+C$. **Ad 4.** Přepíšeme integrál na $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ a položíme $u=\frac{x+1}{x-1}$, $\mathrm{d}u=-\frac{2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$. Tak můžeme integrál předělat na $-\frac{1}{2}\int\frac{-2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-2/3}=-\frac{3}{2}u^{1/3}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$. **Ad 5.** Tady rozšíříme $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$. Ve jmenovateli se objeví jednička, takže zůstane $\int\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$. To už se snadno rozepíše na součet a integruje. Výsledek je $\frac{2}{5}[x^{5/2}-(x+1)^{5/2}]+\frac{2}{3}[x^{3/2}+(x+1)^{3/2}]+C$.

99. **Ad 1.** Položme $u=1+x$, integrál přejde na $\int\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-2u+2}}$. Vytkneme z odmocniny a položíme $y=1/u$, dostaneme $-\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2y^2-2y+1}}$. Ve jmenovateli vytkneme dvojku, doplníme na čtverec a dostaneme $-\frac{2}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+(2y-1)^2}}$, což se už snadno integruje na $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|2y-1+\sqrt{(2y-1)^2+1}\right|=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}+\frac{\sqrt{2+2x^2}}{1+x}\right|+C$. **Ad 2.** Přepíšeme na $\int\frac{x^2+2x+2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$. To se rozpadne na součet tří integrálů: $\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+2}}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$. První dva jsou tabulkové, třetí přepíšeme tím, že vytkneme z odmocniny a položíme $y=1/x$. Tím ten integrál přejde na $-2\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2y^2+2y+1}}=-2\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+(2y+1)^2}}=$ $=-2\sqrt{2}\ln\left|2y+1+\sqrt{(2y+1)^2+1}\right|$. Sečteme všechny tři integrály a dostaneme výsledek $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|-$ $-2\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{x^2+(x+2)^2}}{x}\right|+C$. **Ad 3.** Tady máme štěstí, integrál přepíšeme na $-\int\frac{-1+x-x^2+1-1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x=-\int\sqrt{1+x-x^2}+$ $+\int\frac{2}{\sqrt{1+x-x^2}}$. Pod odmocninou doplníme na čtverec: $\sqrt{1+x-x^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}$. Integrály tím přejdou na $-\frac{\sqrt{5}}{2}\int\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{4}{\sqrt{5}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)^2}}$. V prvním integrálu položíme $\frac{2x-1}{\sqrt{5}}=\sin y$, druhý už je tabulkový a máme výsledek $\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}-\frac{2x-1}{4}\sqrt{1+x-x^2}+C$. **Ad 4.** Tento integrál lze také psát ve tvaru $\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}x$. Vnitřek odmocniny přepíšeme na $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$, načež můžeme položit $u=x-\frac{1}{x}$ a integrál přejde na $\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2+u^2}}=\ln\left|\frac{u}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{u^2}{2}+1}\right|=\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C$.

100. **Ad 1.** $\frac{5+1}{2}=3$, což je celé číslo, takže můžeme rovnou klást $u^2=1-x^2$, $-u\,\mathrm{d}u=x\,\mathrm{d}x$. Integrál přepíšeme na $\int x^4u^{-1}x\,\mathrm{d}x=$ $=-\int(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u$. **Ad 2.** Tady je $\frac{0+1}{3}$ necelé, ale když k tomu přičteme mocninu toho binomu, tj. $-1/3$, dostaneme číslo celé. Máme tedy vyhodit x^3 ven a dostaneme $\int x^{-1}(1+x^{-3})^{-1/3}\,\mathrm{d}x$. Teď položíme $u^3 = 1+x^{-3}$, a tedy $3u^2\,\mathrm{d}u = -3x^{-4}\,\mathrm{d}x$. Integrál tedy přepíšeme na $\int x^3u^{-1}x^{-4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^3}$. **Ad 3.** Vytkneme z odmocniny x^3, dostaneme $\int x(-1+3x^{-2})^{1/3}\,\mathrm{d}x$. Tady položíme $u^3 = -1+3x^{-2}$, tj. $x^{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}u^2\,\mathrm{d}u$. Integrál pak přejde na $\int x^4ux^{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{2}\int \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{(u^3+1)^2}$.

101. **Ad 1.** Přepíšeme jako $\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x$, klademe $u = \sin x$. Výsledek: $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$. **Ad 2.** Přepíšeme jako $\int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$, položíme $u = \cos x$. Výsledek: $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$. **Ad 3.** Tady přepíšeme integrál na $\int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^4\,\mathrm{d}x}{\mathrm{tg}^4 x}$. Klademe $u = \mathrm{tg}\,x$, dostaneme $\int \frac{(1+u^2)^3\,\mathrm{d}u}{u^4}$. To se rozpadne na součet $\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + 3\,\mathrm{tg}\,x - \frac{3}{\mathrm{tg}\,x} - \frac{1}{3\,\mathrm{tg}^3 x} + C$. **Ad 4.** Klademe $u = \sqrt{\mathrm{tg}\,x}$, a tedy $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{tg}\,x}} = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^4}$. Vložíme to do integrálu a dostáváme $2\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$. Tento integrál už jsme spočítali v úloze 95, takže už se s tím nemusíme znova trápit a hned máme výsledek $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x+\sqrt{2\,\mathrm{tg}\,x}+1}{\mathrm{tg}\,x-\sqrt{2\,\mathrm{tg}\,x}+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\,x}+1) + \mathrm{arctg}(\sqrt{2\,\mathrm{tg}\,x}-1)\right] + C$. **Ad 5.** $\sin 5x\cos x = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x)$. Integrací dostaneme výsledek $-\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 4x}{8} + C$. **Ad 6.** Tady postupujeme obdobně: $\cos x\cos 2x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2}\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{4}(1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)$. Integrujeme a máme výsledek $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + C$. **Ad 7.** Užijeme toho, že $\mathrm{tg}(x+a) = \frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,a}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,a}$. Označíme $\mathrm{tg}\,a = \alpha$ a vložíme to do našeho integrálu. Dostaneme $\int \mathrm{tg}\,x\frac{\mathrm{tg}\,x+\alpha}{1-\alpha\,\mathrm{tg}\,x}\mathrm{d}x$. Položíme $u = \mathrm{tg}\,x$, integrál přejde na $\int \frac{u(u+\alpha)\mathrm{d}x}{(1+u^2)(1-\alpha u)}$. Rozložíme integrand v parciální zlomky; tím vyjde najevo, že $\frac{u(u+\alpha)}{(1+u^2)(1-\alpha u)} = \frac{1}{1-\alpha u} - \frac{1}{1+u^2}$, a to se už snadno integruje na $-\frac{1}{\alpha}\ln|1-\alpha u| - \mathrm{arctg}\,u = -x - \frac{\ln|1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,a|}{\mathrm{tg}\,a} + C$. **Ad 8.** Položíme $u = \mathrm{tg}\,x$, dostaneme $\int \frac{\mathrm{d}u}{(3+5u)(1+u^2)}$. Zlomek rozložíme na $\frac{25}{34}\frac{1}{3+5u} - \frac{5}{68}\frac{2u}{1+u^2} + \frac{3}{34}\frac{1}{1+u^2}$, což se integruje na $\frac{5}{34}\ln|3+5\,\mathrm{tg}\,x| - \frac{5}{68}\ln|1+\mathrm{tg}^2 x| + \frac{3}{34}x + C$.

102. Nejdřív si uvědomíme, že je $\sin x = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}$ a $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Pak se vrhneme na jednotlivé body. **Ad 1.** Máme $\mathrm{d}u = (1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2})\frac{\mathrm{d}x}{2}$, což dává $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+^2}$. **Ad 2.** $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$. **Ad 3.** $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$. **Ad 4.** Stačí dělit výsledky předchozích dvou bodů mezi sebou a dostaneme $\frac{2u}{1-u^2}$. Totéž by vyšlo, kdybychom použili, že $\mathrm{tg}\,x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$.

103. **Ad 1.** Použijeme tu substituci, dostaneme integrál $\int \frac{2\,\mathrm{d}u}{a(1+u^2)+b(1-u^2)} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}u\right)^2}$. To už se přímočaře integruje a dostaneme výsledek $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + C$. **Ad 2.** Upotřebíme substituci, dostaneme $2\int \frac{\mathrm{d}u}{2au+b(1-u^2)+c(1+u^2)}$. Přeskládáme to a doplníme na čtverec, čímž obdržíme $\frac{2}{c-b}\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{a}{c-b}\right)^2 + \frac{c^2-a^2-b^2}{(c-b)^2}} = \frac{2(c-b)}{c^2-a^2-b^2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+\left[\frac{(c-b)u+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right]^2}$, což už se přímočaře integruje na $\frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\mathrm{arctg}\left[\frac{(c-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+a}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}}\right] + C$. **Ad 3.** Integrál přepíšeme na $\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}}$. Upotřebíme substituci,

dostaneme $2\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{1}{2u}+\frac{1}{1-u^2}} = 4\int \frac{u(1-u^2)}{1+2u-u^2}\mathrm{d}u$. Provedeme dělení a integrál standardním způsobem rozkrouháme, až dostaneme výsledek $2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+8\operatorname{tg}\frac{x}{2}+8\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+6\sqrt{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+C$. Mimochodem nejde zdaleka o nejjednodušší postup, lepší je si uvědomit, že $2\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^2-1$ a že platí též $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

104. **Ad 1.** Označme $I_n=\int x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Jednou použijeme per partes, x^n se derivuje a e^x se integruje. Tím zjistíme, že $I_n=x^n\mathrm{e}^x-nI_{n-1}$. To už je rekurence, se kterou můžeme spočítat jakékoli I_n (když ještě uvážíme, že $I_0=\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x$). Vzorec pak už snadno dokážeme indukcí: pro $n=0$ platí a pro všechna větší n má platit ta naše rekurence $I_n=x^n\mathrm{e}^x-I_{n-1}$. Když vezmeme $I_n=(-1)^n n!\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$ a ze sumy oddělíme poslední člen (s $k=n$), vskutku dostaneme $I_n=(-1)^n n!\mathrm{e}^x(-1)^n\frac{x^n}{n!}+(-1)^n n!\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$. První člen je jen $\mathrm{e}^x x^n$ a v druhém přepíšeme $(-1)^n n!$ jako $-n(-1)^{n-1}(n-1)!$, čímž je to dokázáno. **Ad 2.** Tady se e^x derivuje a x^n integruje. Zase označme $I_n=\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x^n}$. Jedno per partes pak vydá rekurenci $I_n=-\frac{\mathrm{e}^x}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{1}{n-1}I_{n-1}$. Tato rekurence funguje až do $I_1=\int\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{x}$, kde se zasekne, protože $1/x$ se neintegruje na vyšší mocninu. Ve skutečnosti v tomto integrálu můžeme pouze položit $u=\mathrm{e}^x$, čímž přejde na $\int\frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$, a to jsme podle zadání označili $\mathrm{li}(u)=\mathrm{li}(\mathrm{e}^x)$. Vzorec dokážeme už snadno, když si všimneme, že při $n=1$ platí a pro vyšší n platí rekurence, kterou ještě přepíšeme na tvar $(n-1)I_n-I_{n-1}=-\frac{\mathrm{e}^x}{x^{n-1}}$. Dosadíme-li tam ten vzorec, hned vidíme, že je to pravda.

105. **Ad 1.** Nejdřív vysubstituujeme trojku tím, že položíme $u=3x$. Integrál pak přejde na $\frac{1}{3^4}\int x^3\mathrm{e}^x$, což je podle úlohy 104 rovno $-\frac{1}{81}6\mathrm{e}^x\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{x^k}{k!}=\frac{1}{81}\mathrm{e}^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$. **Ad 2.** Položíme $u=-x^2$, tedy $-\frac{\mathrm{d}u}{2}=x\,\mathrm{d}x$. Náš integrál tím přejde na $\int u^3\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u=-\mathrm{e}^{-x^2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C$. **Ad 3.** Tady položíme $x=u^2$, $\mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$, a dostaneme $2\int u^5\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$, což je podle úlohy 104 rovno $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x^{5/2}-5x^2+20x^{3/2}-60x+120\sqrt{x}-120)+C$. **Ad 4.** Položíme $u=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, a integrál přejde na $\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u}=u-\ln(1+u)=\mathrm{e}^x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$. **Ad 5.** Položíme $u^6=\mathrm{e}^x$, z čehož vyplývá $\mathrm{d}x=\frac{6\,\mathrm{d}u}{u}$. Po dosazení do integrálu dostaneme $6\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)(u^2+1)}$. Rozložíme v parciální zlomky, dostaneme $\frac{1}{u(u+1)(u^2+1)}=\frac{1}{u}-\frac{1/2}{u+1}-\frac{1}{4}\frac{2u}{u^2+1}-\frac{1/2}{1+u^2}$, což se už snadno integruje na $\ln u-\frac{1}{2}\ln(u+1)-\frac{1}{4}\ln\left(u^2+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u=x-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^x+1)-\frac{1}{4}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x+C$. **Ad 6.** Zapíšeme $\sin x$ jako $\mathfrak{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, takže integrál pak má tvar $\mathfrak{Im}\int x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x=\left\|\begin{matrix}x & 1\\ \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} & \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+\mathrm{i}}\end{matrix}\right\|=\mathfrak{Im}\left[x\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+\mathrm{i}}-\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(1+\mathrm{i})^2}\right]$. Jelikož $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, je také hned vidět, že $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$. Proto je výsledek roven $\frac{1}{\sqrt{2}}x\mathrm{e}^x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x+C$. **Ad 7.** Tady nejdřív položíme $u=\mathrm{e}^x$, což integrál převede na $\int\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\frac{\mathrm{d}u}{u}$, a pak položíme $\frac{u-1}{u+1}=y^2$. To znamená, že $\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}=y\,\mathrm{d}y$, že $u=\frac{1+y^2}{1-y^2}$, a nakonec také $u+1=\frac{2}{1-y^2}$. Integrál přepíšeme na $\int\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\frac{(u+1)^2}{u}\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}$ a provedeme tu substituci, čímž získáme $\int y\frac{4}{(1-y^2)^2}\cdot\frac{1-y^2}{1+y^2}y\,\mathrm{d}y=4\int\frac{y^2\,\mathrm{d}y}{(1-y^2)(1+y^2)}$. Tady máme velké štěstí, protože si hned všimneme, že je $\frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)$, a to už se snadno integruje na $\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|-2\operatorname{arctg}y+C=\ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}+C$.

106. **Ad 1.** Klaďme $u=x+1$, integrál se přepíše na $\int(u-1)\operatorname{arc\,tg} u\,\mathrm{d}u=\int u\operatorname{arc\,tg} u\,\mathrm{d}u-\int\operatorname{arc\,tg} u\,\mathrm{d}u$. V obou integrálech provedeme per partes, přičemž $\operatorname{arc\,tg} u$ se bude derivovat a ten zbytek integrovat. Nakonec tak dostaneme $\frac{u^2-2u+1}{2}\operatorname{arc\,tg} u-\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)$, což po vrácení substituce dá $\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg}(x+1)-\frac{x+1}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C$. **Ad 2.** Jelikož víme, že $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ je inversní funkcí k $\operatorname{sh} x$, bude zřejmě dobře položit $x=\operatorname{sh} u$. Tím integrál přejde na $\int u^2\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$. Po dvojím per partes dostaneme výsledek $u^2\operatorname{sh} u-2u\operatorname{ch} u+2\operatorname{sh} u$, což po odstranění substituce dá $x\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})-2\sqrt{x^2+1}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2x+C$. **Ad 3.** Použijeme per partes, celý ten výraz se bude derivovat a integrovat se bude jednička. Derivace $\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ je rovna $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{(x+1)^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}-\frac{2\sqrt{x}}{(1+x)^2}\right)$. Vytkneme ze závorky $1/(1+x)$ a dostaneme $\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-4x}}\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)}=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, což je celkem ucházející. Po jednom per partes nám tedy zůstane pouze integrál $2\int\frac{x}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$, který po substituci $\sqrt{x}=u$ rychle vydá výsledek $2u-2\operatorname{arc\,tg} u$. Celkem i s prvním sčítancem z per partes tedy máme $x\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-2\sqrt{x}+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+C$. **Ad 4.** Po rozepsání logaritmu dostaneme $\int\left(\frac{\ln(x+a)}{x+b}+\frac{\ln(x+b)}{x+a}\right)\mathrm{d}x$. Teď si uvědomíme, že $\frac{1}{x+a}=[\ln(x+a)]'$. To znamená, že integrál lze psát i jako $\int\left(\ln(x+a)[\ln(x+b)]'+\ln(x+b)[\ln(x+a)]'\right)\mathrm{d}x$. Jenže podle pravidla pro derivaci součinu pod znamením integrálu stojí $[\ln(x+a)\ln(x+b)]'$. Integrování a derivování se navzájem zruší a zůstane výsledek $\ln(x+a)\ln(x+b)+C$. **Ad 5.** Zase uděláme per partes, přičemž se celý logaritmus bude derivovat a jednička se bude integrovat. Derivace toho logaritmu je $\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{1-x^2}}$, takže musíme integrovat $\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, což je rovno $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}$. Přičteme k tomu první sčítanec z per partes a máme výsledek $x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)-\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}+C$. **Ad 6.** Opět použijeme per partes: $\int x\arccos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\left\|\begin{matrix}\arccos\frac{1}{x} & \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\\ x & \frac{x^2}{2}\end{matrix}\right\|=\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$.
Ad 7. Rozpitváme integrál na hromadu sčítanců takto: $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x=\int(1+x-1)\ln(1+x)\,\mathrm{d}x+\int(1-x-1)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=\int(1+x)\cdot\ln(1+x)\,\mathrm{d}x+\int(1-x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x-\int\ln(1+x)\,\mathrm{d}x-\int\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$. Podle bodu 5 úlohy 90 je $\int x^\alpha\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\ln x-\frac{1}{\alpha+1}\right)+C$ pro jakékoli $\alpha\neq-1$. Takže všechny čtyři tyto integrály už snadno spočteme. Když se prach usadí a všechno pěkně upravíme, obdržíme výsledek $\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+x+C$. **Ad 8.** Už jsme dřív použili ten trik, že $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ je inversí funkce $\operatorname{sh} x$, a teď na něj bude čas znova. Položme tedy $x=a\operatorname{sh} u$. Tím integrál přejde na $a^{3/2}\int\sqrt{\operatorname{sh} u+\operatorname{ch} u}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$. Jelikož $\operatorname{sh} x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ a $\operatorname{ch} x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$, je jasné, že $\operatorname{sh} u+\operatorname{ch} u=\mathrm{e}^u$. Celkem tedy máme $\frac{a^{3/2}}{2}\int\mathrm{e}^{u/2}(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u})\,\mathrm{d}u$. Nyní položíme $\mathrm{e}^u=y^2$, tj. $\mathrm{d}u=\frac{2\,\mathrm{d}y}{y}$, a dostaneme $\frac{a^{3/2}}{2}\int y(y^2+y^{-2})\frac{2\,\mathrm{d}y}{y}=a^{3/2}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{1}{y}\right)$. Teď je jen potřeba vrátit tu substituci. Jelikož $\operatorname{sh} u=x/a$, je zřejmě $u=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}\right)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$, a tedy je také $y=\sqrt{\mathrm{e}^u}=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}}$, takže nakonec vidíme, že výsledek je $\frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^{3/2}-\frac{a^2}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+a^2}}}+C$.