1 Spočtěte následující určité integrály:

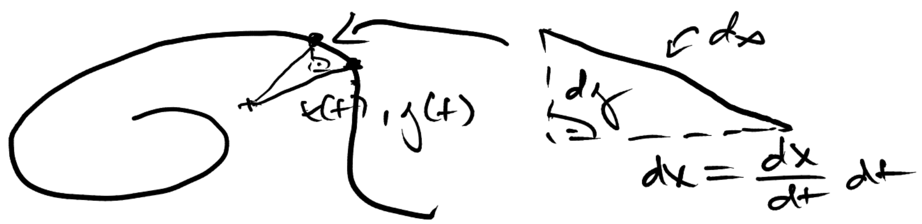
1. $\displaystyle\int_0^5 x^2\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ (zkuste $x = \cos 2u$); **7.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (zkuste $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$); **8.** $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$.

2 A co tyto integrály s nekonečnými mezemi?

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **5.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

3 Mějme nějakou křivku danou parametricky $x = x(t)$, $y = y(t)$. Když posuneme parametr o $\mathrm{d}t$, o kolik se změní x a y? Podle toho spočítejte délku kousku křivky $\mathrm{d}s$, který při této změně vykreslíme. Vizte obrázek.



Délku křivky už pak zjistíme snadno tím, že zintegrujeme $\mathrm{d}s$.

4 Vypočtěte délku:

1. paraboly $y = x^2$ mezi body $x = -1$ a $x = +1$;
2. řetězovky $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ mezi body $x = 0$ a $x = b$.

5 Co když by ta křivka byla zadaná v polárních souřadnicích? Tedy kdybychom místo $x(t)$ a $y(t)$ měli zadáno $r(t)$ a $\varphi(t)$? Přepište element délky $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ tak, aby v něm vystupovalo pouze r a φ. (**Nápověda:** Mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí vztah $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.)

6 Vypočtěte délku:

1. logaritmické spirály $r = \mathrm{e}^{a\varphi}$ od jejího prostředku v $r = 0$ až do bodu s $r = 1$;
2. kardioidy $r = a(1 + \cos\varphi)$ (celá křivka se opíše, když φ projde od 0 do 2π).

7 Určete:

1. objem a povrch tělesa vzniklého rotací křivky $r = \sin z$ pro $0 < z < \pi$;
2. délku jednoho oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ pro $0 < t < 2\pi$;
3. plochu mezi parabolami $y = a(x^2 - 1)$ a $y = -b(x^2 - 1)$, kde a, b jsou kladné;
4. plochu omezenou trojlístkem, který má v polárních souřadnicích rovnici $r = \sin 3\varphi$;
5. délku křivky zadané v polárních souřadnicích $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$ (pro $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$).

8 Když už umíme počítat délku křivky, můžeme spočítat i jiné věci. Zapište pomocí integrálu, jak byste spočítali:

1. hmotnost drátu, je-li v každém jeho bodě zadána jeho délková hustota μ;
2. moment setrvačnosti tyčky vzhledem k ose jdoucí jednak jejím prostředkem, jednak jejím koncem;
3. souřadnice těžiště nějakého plošného útvaru, je-li v každém jeho bodě dána jeho plošná hustota ρ.

9 **Zbude-li čas:** Spočtěte plochu měsíčku omezeného dvěma kružnicemi o poloměru 1, jejichž středy jsou od sebe vzdáleny o a ($0 < a < 1$).