1 Spočtěte následující určité integrály:

1. $\int_0^5 x^2\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

6. $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ (zkuste $x = \cos 2u$); **7.** $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (zkuste $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$); **8.** $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$.

2 A co tyto integrály s nekonečnými mezemi?

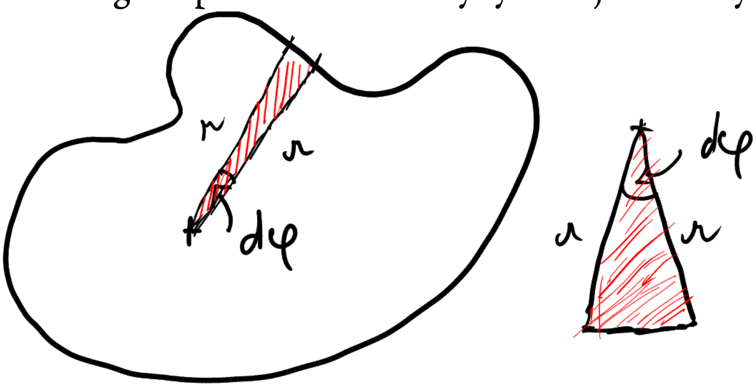
1. $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$; **3.** $\int_0^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **5.** $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

3 Často se říká, že integrál udává plochu pod křivkou. Ale proč to tak je? To, co dělá integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, je to, že sčítá hromadu nekonečně malých kousků $f(x)\,\mathrm{d}x$. Kde najdete plochu těchto kousíčků na grafu funkce $f(x)$?

4 Nalezněte plochu následujících útvarů:

1. kusu paraboly $ax(b-x)$, který je nad osou x. Zapište výsledek pomocí jeho „základny" a „výšky".;
2. elipsy o poloosách a a b;
3. bramboroidu ohraničeného shora grafem funkce $\frac{1}{1+x^2}$, ze stran přímkami $x = \pm 1$ a zdola osou $y = 0$.

5 Co když chceme spočítat plochu omezenou nějakou křivkou zadanou v polárních souřadnicích (tedy vzdáleností od počátku r a úhlem φ)? Podívejte se na obrázek níže. Jaká je plocha červeně vybarveného trojúhelníčka? Integrací pak sečtěte všechny tyto trojúhelníčky a dostanete plochu.



6 Spočtěte plochu následujících útvarů:

1. Lemniskáty zadané vztahem $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. **2.** Kardioidy zadané vztahem $r = a(1+\cos\varphi)$.

7 Určete:

1. objem a povrch tělesa vzniklého rotací křivky $r = \sin z$ pro $0 < z < \pi$;
2. délku jednoho oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ pro $0 < t < 2\pi$;
3. plochu mezi parabolami $y = a(x^2-1)$ a $y = -b(x^2-1)$, kde a, b jsou kladné;
4. plochu omezenou trojlístkem, který má v polárních souřadnicích rovnici $r = \sin 3\varphi$;
5. délku křivky zadané v polárních souřadnicích $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$ (pro $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$).

8 Když už umíme počítat délku křivky, můžeme spočítat i jiné věci. Zapište pomocí integrálu, jak byste spočítali:

1. hmotnost drátu, je-li v každém jeho bodě zadána jeho délková hustota μ;
2. moment setrvačnosti tyčky vzhledem k ose jdoucí jednak jejím prostředkem, jednak jejím koncem;
3. souřadnice těžiště nějakého plošného útvaru, je-li v každém jeho bodě dána jeho plošná hustota ρ.

$\boxed{9}$ **Zbude-li čas:** Spočtěte plochu měsíčku omezeného dvěma kružnicemi o poloměru 1, jejichž středy jsou od sebe vzdáleny o a ($0 < a < 1$).