1 Spočtěte následující určité integrály:

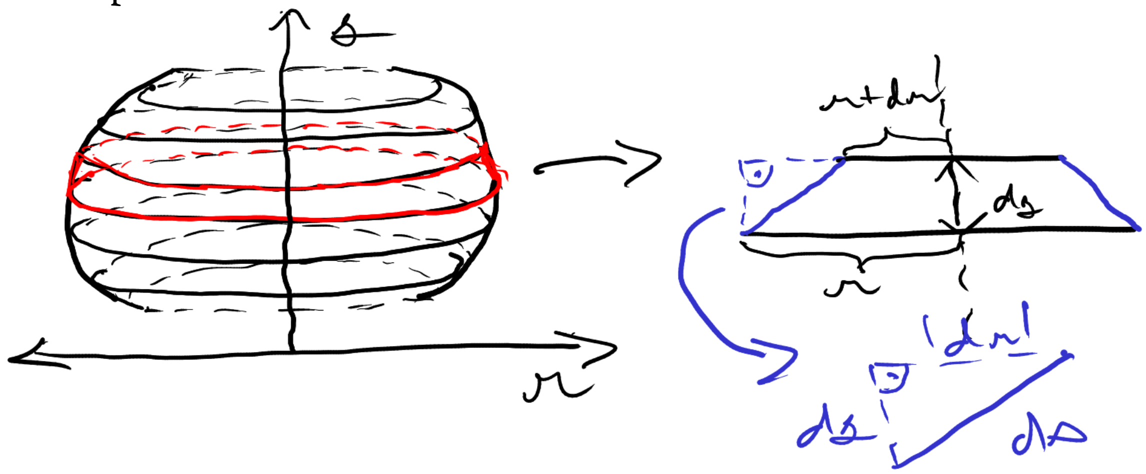
1. $\displaystyle\int_0^5 x^2\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

6. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$ (zkuste $x = \cos 2u$); **7.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (zkuste $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$); **8.** $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\,\mathrm{d}x$.

2 A co tyto integrály s nekonečnými mezemi?

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **5.** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

3 Představte si křivku zadanou ve tvaru $r = r(z)$, kde r je kolmá vzdálenost každého bodu křivky od osy z (viz obrázek). Teď tu křivku vezmeme a otočíme ji kolem osy z, čímž vykreslíme nějakou plochu. Představte si ji nakrouhanou na malé placičky jako na obrázku a zjistěte (všechny součiny dvou nekonečně malých veličin $\mathrm{d}(\cdots)$ berte jako nulu):
1. jaký objem má jedna taková placička? **2.** jaký povrch mají její boční strany (vyznačené modře)?
Objem a povrch takového rotačního tělesa pak zjistíme prostě tak, že zintegrujeme objemy, resp. povrchy všech těchto placiček.



4 Vypočtěte objemy a povrchy následujících těles:
1. katenoidu, který vznikne rotací křivky $r = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$ pro $-b < z < b$;
2. paraboloidu, který vznikne rotací paraboly $z = a - \frac{ar^2}{b^2}$ pro $0 < r < b$.

5 Určete:
1. objem a povrch tělesa vzniklého rotací křivky $r = \sin z$ pro $0 < z < \pi$;
2. délku jednoho oblouku cykloidy $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ pro $0 < t < 2\pi$;
3. plochu mezi parabolami $y = a(x^2 - 1)$ a $y = -b(x^2 - 1)$, kde a, b jsou kladné;
4. plochu omezenou trojlístkem, který má v polárních souřadnicích rovnici $r = \sin 3\varphi$;
5. délku křivky zadané v polárních souřadnicích $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$ (pro $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$).

6 Když už umíme počítat délku křivky, můžeme spočítat i jiné věci. Zapište pomocí integrálu, jak byste spočítali:
1. hmotnost drátu, je-li v každém jeho bodě zadána jeho délková hustota μ;
2. moment setrvačnosti tyčky vzhledem k ose jdoucí jednak jejím prostředkem, jednak jejím koncem;
3. souřadnice těžiště nějakého plošného útvaru, je-li v každém jeho bodě dána jeho plošná hustota ρ.

$\boxed{7}$ **Zbude-li čas:** Spočtěte plochu měsíčku omezeného dvěma kružnicemi o poloměru 1, jejichž středy jsou od sebe vzdáleny o a ($0 < a < 1$).