Deváté cvičení (určité integrály)

Výpočty určitých integrálů

Určité integrály

Platí Newtonova-Leibnizova formule: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde F je primitivní funkce f, tedy $F' = f$.

Kromě ní platí tato pravidla:

- Linearita, $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g\,\mathrm{d}x$ pro konstanty α a β.
- Rozdělení integrálu: $\int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_b^c f\,\mathrm{d}x = \int_a^c f\,\mathrm{d}x$ a prohození mezí: $\int_b^a f\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.
- Substituce: jako u neurčitého integrálu, ale není potřeba ji vracet, stačí přetransformovat i meze.
- Per partes: $\int_a^b f g'\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g\,\mathrm{d}x$.

107 Postupy popsanými výše vypočtěte následující integrály:

1. $\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **4.** $\int_a^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(a>0)$; **5.** $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$; **6.** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$;

7. $\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$; **8.** $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$; **9.** $\int_0^{3/4} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$; **10.** $\int_0^1 \frac{x^{2n}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Nápověda: 7. $x - \frac{1}{x} = u$. **10.** Per partes dá rekurenci.

108 Opakovaným užitím integrace per partes vypočtěte následující integrály (pro n, k přirozené):

1. $\int_0^{\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^1 x^n(1-x)^k\,\mathrm{d}x$.

109 Dokažte, že platí $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{při } k=0; \\ 0 & \text{při jiném } k \text{ celočíselném.} \end{cases}$

110 Pomocí faktu z předchozí úlohy a ostatních pravidel vypočtěte následující integrály:

1. $\int_0^{\pi} \cos^{100} x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int_0^{\pi} \cos^n x\cos nx\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ (n celé).

111 **Aproximace π.** Všichni asi znáte školáckou aproximaci $\pi \approx \frac{22}{7}$. Víte ale, jak je přesná? Jestli ne, tak to teď zjistíte.

1. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Podívejte se na integrand. Jednoduše ukažte, je integrál kladný. Je tedy $\frac{22}{7}$ větší, nebo menší než π?

3. Jestli chcete odhad chyby aproximace, uvědomte si, že na intervalu $\langle 0;1\rangle$ platí $1 \le 1+x^2 \le 2$, a proto je $\frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le$ $\le \int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$. Pro určitější představu můžete $\frac{1}{1+x^2}$ pod integrálem rozvinout v řadu a vzít prvních pár členů.

Výpočty délek, ploch, objemů atd.

112 Vypočtěte plochu parabolické „čepičky“ o výšce h a podstavě a (viz obrázek na přespříští straně).

$\boxed{113}$ Spočtěte plochu následujících obrazců:

1. elipsy o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; **2.** křivky o rovnici $y^2=x^2(a^2-x^2)$; **3.** obrazce omezeného křivkou $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ a přímkou $x=2a$; **4.** hvězdice (asteroidy) o rovnici $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; **5.** trojlístku $r=a\sin 3\varphi$.

$\boxed{114}$ Vypočtěte délku následujících křivek:

1. paraboly $y=h^2-x^2$, $-h\le x\le h$; **2.** asteroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; **3.** řetězovky $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ mezi body $[0;a]$ a $[b;h]$.

$\boxed{115}$ Vypočtěte objem elipsoidu o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

$\boxed{116}$ Vypočtěte objem a povrch (ale pozor, to není lehké!) následujících rotačních těles (viz obrázky na následující straně):

1. paraboloidu, který vznikne rotací paraboly $z=a-\frac{ax^2}{r^2}$ pro $0\le x\le r$ kolem osy z (zde a je jeho výška a r poloměr podstavce); **2.** sudu, který vznikne rotací paraboly $x=R-z^2\frac{R-r}{h^2}$ pro $-h\le z\le h$ kolem osy z (zde $2h$ je výška sudu, r poloměr víka a dna a R poloměr uprostřed); **3.** vázy, která vznikne rotací křivky $x=1-\frac{\sin z}{2}$, $y=0$ při $-\pi\le z\le\frac{2\pi}{3}$ kolem osy z. Povrch nepočítejte.

$\boxed{117}$ **Simpsonův vzorec.** Ukažte, že pokud jsou plochy průřezů kolmých k ose x kvadratickou funkcí x (tedy $S(x)=Ax^2+Bx+C$), pak pro objem tělesa platí vztah $V=\frac{h}{6}(S_0+4S_{1/2}+S_1)$, kde h je délka tělesa podél osy x, S_0 a S_1 jsou plochy průřezů na krajích tělesa a $S_{1/2}$ je plocha průřezu v polovině délky. Viz obrázek na následující straně.

$\boxed{118}$ **Vodní hodiny.** Chcete si udělat vodní hodiny, tedy nějakou nádobu, která má ve dně díru o ploše S. Když tam nalejete vodu, tak ta voda za nějaký čas vyteče, a tak můžete měřit čas ve stylu: „cvičení z analysy mi trvá vypracovat tak dlouho, že hodiny třikrát musím naplnit a nechat vytéct“. Lepší by ale bylo, kdyby hladina vody v nádobě s časem klesala rovnoměrně, tedy aby rychlost klesání hladiny byla konstantní. Pak za čas t klesne hladina vždy o nějaké αt a můžeme čas měřit pravítkem.

1. Jaký rotačně symetrický tvar má mít nádoba, aby hladina vody klesala konstantní rychlostí?
2. Do jaké výšky musíte nalít vodu, abyste odměřili čas t (tj. aby za právě tento čas vytekla všechna voda)?
3. Spočtěte objem, který vaše nádoba musí mít, aby, je-li nalita až po okraj, odměřila čas t.

Nápověda: Je-li ve dně díra a voda sahá do výšky h, bude ze dna voda téct rychlostí $v=\sqrt{2gh}$ (Torricelliho vzorec).

Další integrační kejkle

$\boxed{119}$ Které z následujících integrálů můžete na první pohled prohlásit za nulové? Co Vás k tomu opravňuje?

1. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3\sin x\,dx$; **2.** $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^5\cos^3 x\,dx}{(1+x^2)^2}$; **3.** $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$, **4.** $\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx$; **5.** $\int_0^{2\pi}\sin^3 x+\cos^3 x\,dx$.

$\boxed{120}$ Ukažte, že $\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}\,dx=0$. Pomocí tohoto výsledku pak vyčíslete též $\int_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx$. **Nápověda:** $\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$.

$\boxed{121}$ Hodně integrálů lze elegantně vyřešit tím, že převrátíte směr integrace. Tedy pokud jde integrál třeba od nuly do π, tak uděláte substituci $u=\pi-x$ atd. Vyzkoušejte si to na těchto integrálech:

1. $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}\,dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$; **2.** $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$; **3.** $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x\,dx}{\sin x+\cos x}$; **4.** $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$; **5.** $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$.

Nápověda: Ad 4. Nejdřív udělejte záměnu proměnných $x=\operatorname{tg}u$.

$\boxed{122}$ **Harmonická čísla.** Součtům $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ se říká *harmonická čísla*. Platí pro ně jeden velmi užitečný odhad, který si s pomocí integrálů celkem snadno odvodíme:

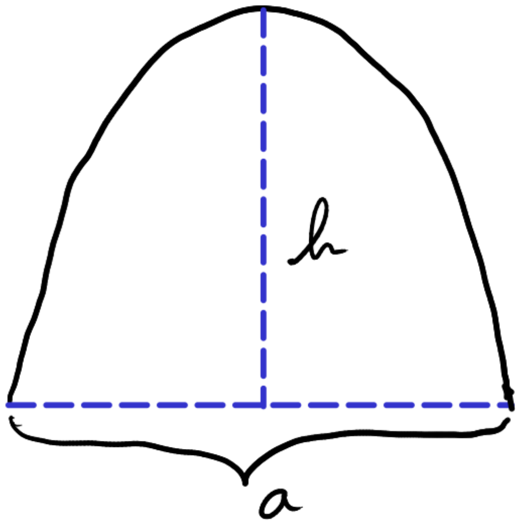
1. Uvědomte si, že platí $H_n=\int_0^1(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})\,dx=\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}\,dx$.

2. Proveďte v tomto integrálu nejdřív záměnu $u=1-x$ a pak $u=y/n$. Pak integrál rozdělte ve stylu $\int_0^n(\text{něco})=\int_0^1(\text{něco})+\int_1^n(\text{něco})$.

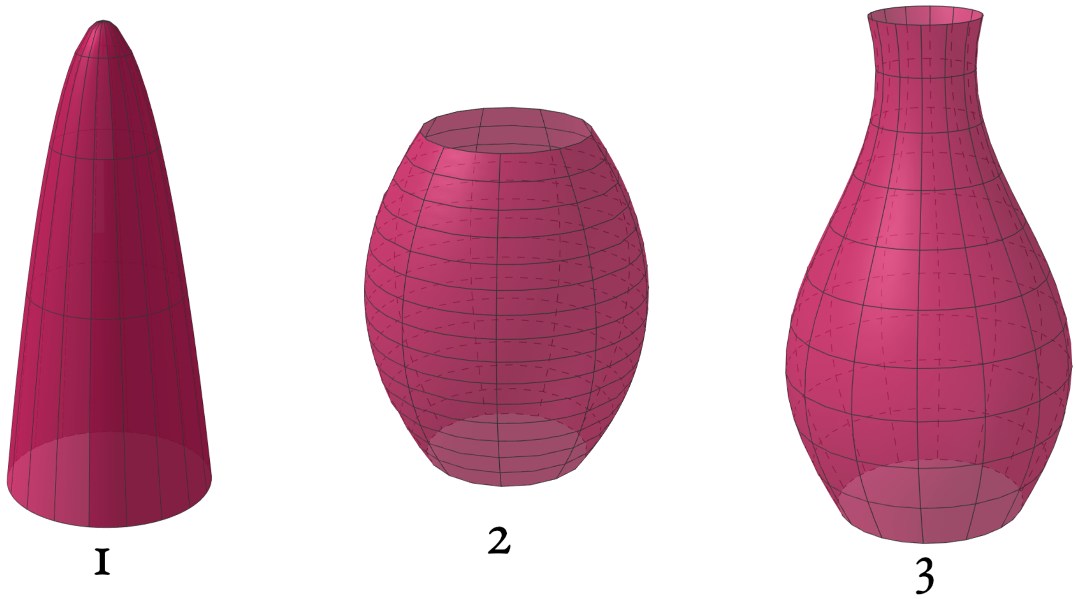
3. Integrál od 1 do n rozdělte na dva sčítance. Měli byste dostat, že $H_n=(\text{dva divné integrály})+\ln n$.
4. Chceme-li znát H_n pro nějaké veliké n, pak ty dva divné integrály budou asi dost blízké své limitě pro $n\to\infty$. Spočtete ji a přesvědčte se, že oba divné integrály jsou konečné. Tím jste ukázali, že $H_n\approx\ln n+(\text{dva divné integrály})$. Označme ty divné integrály písmenem γ. To je takzvaná *Eulerova-Mascheroniho konstanta* a její číselná hodnota je asi 0,577 216…

Obrazová příloha

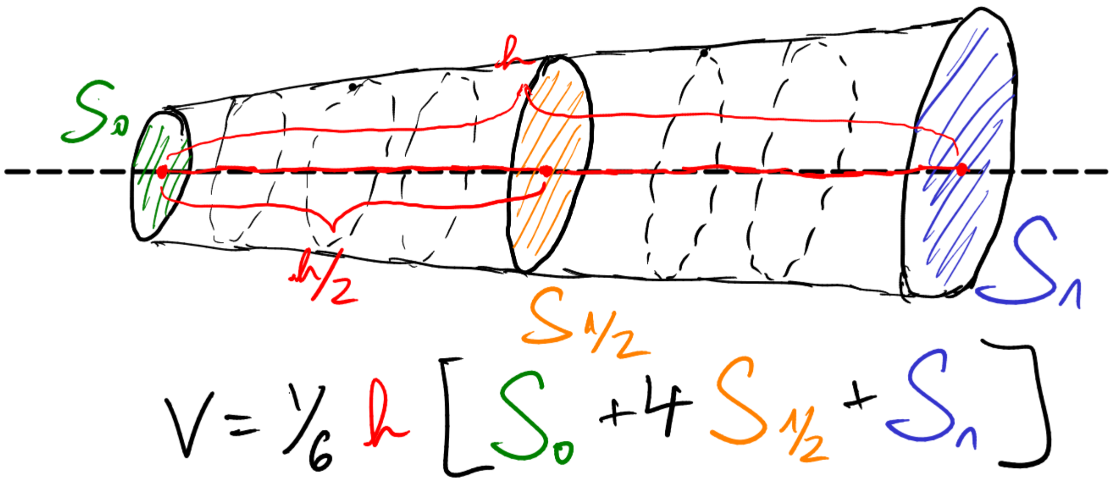
Parabolická čepička z úlohy 112:



Obrázky těles z úlohy 116:



Nedomrlá kresba k Simpsonově vzorci (úloha 117):



Odpovědi a řešení

107. **Ad 1.** Použijeme per partes: $\int\limits_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} x & 1 \\ \mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{matrix} \right\| = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln 2}{2} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1-\ln 2}{2}$. **Ad 2.** Zase per partes: $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} x & 1 \\ \sin x & -\cos x \end{matrix} \right\| = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \pi$, neboť poslední integrál je roven nule. **Ad 3.** To je prostě arkustangenta: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{\infty} = \pi$. **Ad 4.** $1/x^2$ se integruje na $-1/x$, takže máme výsledek $-\left[\frac{1}{x}\right]_a^{\infty} = \frac{1}{a}$. **Ad 5.** Položíme $x = \cos 2u$, $\mathrm{d}x = -2\sin 2u\,\mathrm{d}u$. Integrál tím přejde na $-2\int\limits_{\pi/2}^{0} \sqrt{1+\cos 2u}\,1 - \cos 2u \sin 2u\,\mathrm{d}u$, což je rovno $2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{\sin u} 2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u = 4\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = 2\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u = \pi + [\sin 2u]_0^{\pi/2} = \pi$. **Ad 6.** Tady položíme $x = a\sin u$, $\mathrm{d}x = a\cos u\,\mathrm{d}u$. Integrál tím přejde na $\int\limits_0^{\pi/2} a^2\sin^2 u a^2\cos^2 u\,\mathrm{d}u$. Teď upravíme $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1-\cos 4x}{8}$, takže po dosazení do integrálu dostaneme $\frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\pi/2} 1 - \cos 4u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi a^4}{16} - \frac{a^4}{32}[\sin 4u]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}$. **Ad 7.** Díky sudosti můžeme integrál psát jako $2\int\limits_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$, což upravíme na $2\int\limits_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$. V čitateli máme $1+\frac{1}{x^2}$, což je derivací $x - \frac{1}{x}$. Proto přepíšeme jmenovatel jako $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 2$ a po substituci $u = x - \frac{1}{x}$ máme $2\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}$, což po standardních úpravách přejde na $2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **Ad 8.** Podle bodu 1 úlohy 95 je $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Takže do toho stačí dosadit $x = 2$ a $x = 0$ a získaná čísla od sebe odečíst. Dostane se výsledek $\frac{\ln 3}{6} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **Ad 9.** Položme nejdřív $u = 1+x$, dostaneme $\int\limits_1^{7/4} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-2u+2}}$. Teď uděláme standardní trik s vytknutím z odmocniny a s přechodem k $v = 1/u$; to dá nakonec $\int\limits_{4/7}^{1} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{2v^2-2v+1}}$. Zapíšeme $2v^2 - 2v + 1$ jako $\frac{1}{2}[1+(2v-1)^2]$ a položíme $y = 2v-1$, což integrál nakonec převede na $\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{1/7}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\frac{1}{7}+\sqrt{1+\frac{1}{49}}}$, což lze po nějakých úpravách rovněž přepsat na $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **Ad 10.** Tady použijeme per partes. Označme si ten náš integrál I_n. Pak zapíšeme $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^{2n}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left\| \begin{matrix} x^{2n-1} & (2n-1)x^{2n-2} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & -\sqrt{1-x^2} \end{matrix} \right\| = -\left[x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + (2n-1)\int\limits_0^1 x^{2n-2} \cdot \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Hranatá závorka je nulová a v druhém integrálu hodíme odmocninu do jmenovatele takto: $I_n = (2n-1)\int\limits_0^1 \frac{x^{2n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n$. Po převedení I_n na jednu stranu dostaneme rekurenci $I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$. Nakonec si uvědomíme, že $I_0 = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ a máme výsledek: $I_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2}$. Když rozšíříme ještě jednou součinem $2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$ a uvědomíme si, že tento součin je roven $2^n n!$, můžeme nakonec napsat $I_n = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

108. **Ad 1.** Označme $I_n = \int\limits_0^{\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ a proveďme per partes. x^n budeme derivovat na nx^{n-1}, e^{-x} se integruje na $-\mathrm{e}^{-x}$. Celkem tedy dostaneme $I_n = -[x^n\mathrm{e}^{-x}]_0^{\infty} + n\int\limits_0^{\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}$. Hranatá závorka je nulová, takže máme $I_n = nI_{n-1}$ a konečně také $I_0 = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, takže celkem dostáváme $I_n = n!$. Podotkněme, že tento integrál konverguje pro jakoukoli *komplexní* hodnotu n, jen když je $\Re n > -1$. Tomuto integrálu se pak říká $\Gamma(n+1)$. **Ad 2.** Označme $I_{n,k} = \int_0^\infty x^n(1-x)^k\,dx$. Pomocí opakovaného per partes budeme postupně chtít odstranit jeden ten činitel, třeba $(1-x)^k$. To tedy budeme derivovat a x^n budeme integrovat, takže dostaneme $I_{n,k} = \left\|\begin{matrix}(1-x)^k & -k(1-x)^{k-1}\\ x^n & \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\end{matrix}\right\| =$ $= -\dfrac{1}{n+1}\Big[(1-x)^k x^{n+1}\Big]_0^1 + \dfrac{k}{n+1} I_{n+1,k-1}$. Hranatá závorka je nulová, neboť předpokládáme $n \geq 1$, $k \geq 1$. Takže za tohoto předpokladu máme rekurenci $I_{n,k} = \dfrac{k}{n+1} I_{n+1,k-1}$. Tu můžeme používat stále dokola až do okamžiku, kdy se k sníží na nulu. V tom okamžiku budeme mít $I_{n,k} = \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} I_{n+k,0}$. Zbývající integrál už snadno vypočteme, protože je $I_{n+k,0} = \int_0^1 x^{n+k}\,dx = \dfrac{1}{n+k+1}$, takže celkem máme $I_{n,k} = \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)} = \dfrac{k!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(n+k+1)}$. Když to rozšíříme ještě $n!$, doplní se tím jmenovatel na $(n+k+1)!$ a máme tedy celkem $I_{n,k} = \dfrac{n!k!}{(n+k+1)!}$.

109. V případě $k = 0$ je to lehké, protože $e^{ikx} = 1$ a integruje se jen jednička, takže se naintegruje skutečně 2π. V ostatních případech máme $\int_0^{2\pi} e^{ikx} = \dfrac{1}{ik}\Big[e^{2\pi ik} - e^0\Big] = \dfrac{1}{ik}[1-1] = 0$.

110. **Ad 1.** Zapíšeme $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. To znamená, že $\cos^{100} x = \dfrac{1}{2^{100}} e^{100ix}(1+e^{-2ix})^{100}$. Integrand se tedy rozpadne na obrovský součet, ve kterém bude člen s e^{100ix}, pak člen s e^{98ix}, atd., zkrátka členy se sudými mocninami až do -100. Jenže už $\int_0^\pi e^{2ix}\,dx$ je nula (stačí udělat záměnu $u = 2x$ a použít úlohu 109), takže všechny tyto členy vypadnou. Jediné, co zůstane, je konstanta, tedy člen s e^{0ix}, protože ten se zintegruje na π. Proto stačí ze součtu vybrat člen, kde není žádné e^{ix}, násobit ho π, a to je výsledek. Po užití binomické věty vyjde najevo, že to je $\dfrac{\pi}{2^{100}}\dbinom{100}{50}$.

Ad 2. Po rozepsání obou sinů podle Eulerových vzorců dostaneme $\dfrac{1}{2^{n+1}i^{n+1}}\int_0^\pi \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^n (e^{inx}-e^{-inx})\,dx = \dfrac{1}{2^{n+1}i^{n+1}}\int_0^\pi (e^{2inx}-1)\cdot$ $\cdot(1-e^{-2ix})^n\,dx$. Teď můžeme klást $2x = u$, což převede integrál na $\dfrac{1}{2^{n+2}i^{n+1}}\int_0^{2\pi}(e^{inu}-1)(1-e^{-iu})^n\,dx$. Teď už je jasné, že přežijí jen členy, v nichž není žádné e^{ix}. Výraz $(e^{inu}-1)(1-e^{-iu})^n$ rozepíšeme na dva kusy, dostaneme $e^{inu}(1-e^{-iu})^n-(1-e^{-iu})^n$. Takže v prvním sčítanci celá mocnina vypadne, zůstane jen jeden krajní člen, a stejně tak i ve druhém. Celkem dostaneme $\dfrac{2\pi}{2^{n+2}i^{n+1}}((-1)^n-1)$. Je-li n sudé, je $(-1)^n = 1$ a výsledek je nulový; při n lichém je $(-1)^n-1$ rovno -2, takže výsledek je: $\int_0^\pi \sin^n x \sin nx\,dx = \begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{\pi}{2^n} & \text{při } n \text{ lichém;}\\ 0 & \text{při } n \text{ sudém.}\end{cases}$

Ad 3. Zcela obdobnou metodou jako v předchozím bodě dostaneme výsledek $\dfrac{\pi}{2^n}$.

Ad 4. Opět rozepíšeme siny podle Eulerova vzorce, čímž dostaneme $\int_0^\pi \dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}}\,dx$. Vytkneme z čitatele i ze jmenovatele kladnou exponenciálu a tím se integrál upraví na $\int_0^\pi e^{i(n-1)x}\dfrac{1-e^{-2inx}}{1-e^{-2ix}}\,dx$. Použijeme ještě vztah pro součet geometrické posloupnosti a nakonec máme $\int_0^\pi e^{i(n-1)x}\left(1+e^{-2ix}+e^{-4ix}+\cdots+e^{-(2n-2)ix}\right)dx$. Teď mohou nastat dvě možnosti: buď je n liché, tj. $n-1$ je sudé a stejně jako v předchozích úlohách přežijí jen členy bez e^{ix}. Takový je ovšem právě jeden (činitel před závorkou se vždycky strefí do prostředního člene v rozvoji geometrické posloupnosti), a tak všechno vypadne a zůstane jen jednička, která se integruje na π. Na druhou stranu, je-li n sudé, můžeme závorky roznásobit. Tím dostaneme pod integrálem součet $e^{i(n-1)x}+e^{i(n-3)x}+\cdots+e^{ix}+e^{-ix}+\cdots+e^{-i(n-3)x}+e^{-i(n-1)x}$. Jedna taková exponenciála e^{ikx} se integruje na $-2/ik$, takže po podrobnějším zkouknutí exponenciál zjistíme, že se tyto zlomky sežerou navzájem a vyjde nula. Výsledek je tedy $\int_0^\pi \dfrac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \begin{cases}\pi & \text{při } n \text{ lichém,}\\ 0 & \text{při } n \text{ sudém.}\end{cases}$

111. **Ad 1.** Rozepíšeme čitatel na $x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4$ a vydělíme to x^2+1 jako na základní škole, čímž obdržíme výsledek $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}$. To se integruje na $\frac{1}{7}-\frac{4}{6}+1-\frac{4}{3}+4-4\frac{\pi}{4}=\frac{22}{7}-\pi$. **Ad 2.** Evidentně platí $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\geq 0$ (protože x^2, a tedy i x^4, je vždy nezáporné). Proto je integrál kladný a musí tudíž být $\frac{22}{7}-\pi>0$, tj. $\frac{22}{7}$ je *větší* než π. **Ad 3.** Integrál $\int\limits_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$ snadno vypočteme a zjistíme, že je roven $\frac{1}{9}-\frac{4}{8}+\frac{6}{7}-\frac{4}{6}+\frac{1}{5}=\frac{1}{630}$. Proto podle nerovnosti v zadání platí $\frac{1}{1260}\leq\frac{22}{7}-\pi\leq\frac{1}{630}$, nebo, jinými slovy, π je někde mezi $\frac{22}{7}-\frac{1}{630}=$ a $\frac{22}{7}-\frac{1}{1260}$. Nebo můžeme rozvinout zlomek v řadu: $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$ (při $|x|<1$, což je zde splněno) a integrovat jednotlivé členy rozvoje, čímž získáme $\frac{22}{7}-\pi=\frac{1}{630}+\frac{1}{2310}+\frac{1}{6435}+\cdots$.

112. Nejdřív musíme vymyslet, jakým funkčním předpisem je zadána parabola, jejíž plochu máme počítat. Chceme, aby mezi jejími kořeny byla vzdálenost a a aby byla otočená vrcholem vzhůru. Tomu vyhoví funkce tvaru $\alpha x(a-x)$ (při $\alpha>0$). Vrchol je v bodě $x=a/2$, kde má funkce hodnotu $\alpha\frac{a^2}{4}$. My chceme, aby ta hodnota byla h, takže musíme položit $\alpha=\frac{4h}{a^2}$. Chceme tedy zjistit plochu, která je mezi grafem funkce $\frac{4h}{a^2}x(a-x)$ a osou x, a ta je dána integrálem $\frac{4h}{a^2}\int\limits_0^a x(a-x)\,\mathrm{d}x=\frac{4h}{a^2}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4ah}{6}=\frac{2}{3}ah$.

113. **Ad 1.** Spočteme jen plochu čtvrtelipsy. Z rovnice vyjádříme $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Plocha pod touto křivkou od $x=0$ až do $x=a$ je právě ta čtvrtina plochy, takže máme $S=4\int\limits_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $x=a\sin u$, $\mathrm{d}x=a\cos u\,\mathrm{d}u$ a dostaneme $S=4ab\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u=$ $=2ab\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u=\pi ab$. **Ad 2.** Tady máme $y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$, takže ta půlka útvaru, která je nad vodorovnou osou, je stejná jako ta, co je pod ní (protože je omezují stejné křivky, jen s opačným znamením). Osu x to protíná v bodech $\pm a$ a 0. Lze tedy předpokládat, že půjde o jakousi osmičku (y' je v bodech $\pm a$ nekonečná, tj. tam křivka jde kolmo k ose x, a v nule je rovna $\pm a$, tj. jde nějak šikmo a nulou prochází křivka dvakrát). Také je vidět, že levé ucho osmičky omezuje stejnou plochu jako pravé, takže stačí udělat jen čtvrtinu. Celkem máme $S=4\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $a^2-x^2=u^2$, tj. $x\,\mathrm{d}x=-u\,\mathrm{d}u$, a dostaneme $4\int\limits_0^a u^2\,\mathrm{d}u=\frac{4a^2}{3}$. **Ad 3.** Nejdřív si uvědomíme, že když má být $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$, tak musí být $\frac{x^3}{2a-x}$ nezáporné. To ale nastane jen při $0\leq x<2a$. Křivka $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$ má také dvě větve symetrické podle osy x, takže stačí počítat jenom plochu horní půlky obrazce. Celková plocha je tedy $S=2\int\limits_0^{2a}\frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}\,\mathrm{d}x$. Povšimněme si, že to je binomický integrál s $m=3/2$, $n=1$ a $p=-1/2$. Vidíme, že $\frac{m+1}{n}=\frac{5}{2}$ není celé, ale když k tomu přičteme ještě p, dostaneme celé číslo. Musíme tedy nejdřív vytknout ze závorky s rozdílem, čímž dostaneme $2\int\limits_0^{2a}x(2ax^{-1}-1)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$, a teď položíme $u^2=2ax^{-1}-1$, tj. $2u\,\mathrm{d}u=-2ax^{-2}\,\mathrm{d}x$. Integrál touto substitucí nakonec přejde na $16a^2\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3}$. Tento poslední integrál spočítáme tak, že vezmeme integrál $\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ a dvakrát ho derivujeme, načež položíme $a=1$. Tím ovšem dostaneme *dvojnásobek* původního integrálu, protože se při derivování vyhodí $(-1)\cdot(-2)=2$. Takže platí $\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^3}=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right]_{a=1}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}=\frac{3\pi}{16}$. Celková plocha je $16a^2$-násobek tohoto čísla, tedy $3\pi a^2$. **Ad 4.** To je opět křivka, která je symetrická podle vodorovné i svislé osy. Stačí tedy opět počítat čtvrtinu, takže po vyjádření y z rovnice dostaneme pro plochu výraz $S=4\int\limits_0^a(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $x=a\sin^3 u$, takže $\mathrm{d}x=3a\sin^2 u\cos u\,\mathrm{d}u$ a po dosazení obdržíme $12a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Tato funkce je sudá, takže si můžeme půjčit dvojku a přepsat integrál jako $6a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Teď dosadíme $\sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$ a $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$, takže dostaneme $-\dfrac{6a^2}{2^6}\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+6+4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\,\mathrm{d}x$. Zde přežijí (podobně jako v úloze 110) jen ty sčítance, které neobsahují vůbec žádné $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Když v malé závorce vybereme $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$, z dlouhé se vybere $4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$; když v malé vybereme $\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$, ve velké se vybere $4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$, a když v malé vybereme -2, z velké se vybere 6. Celkem tedy dostáváme výsledek $-\dfrac{6a^2}{2^6}(4+4-12)\cdot\pi = \dfrac{3\pi}{8}a^2$. **Ad 5.** Počítáme podle formulky $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\dfrac{1-\cos 6\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

114. Budeme vždy postupovat podle vzorce $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$. **Ad 1.** Tady je $y' = -2x$, takže délka je $L = \displaystyle\int_{-h}^{h}\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$. Díky sudosti můžeme psát též $L = 2\displaystyle\int_0^h\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$. Položíme $x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} u$, a tedy $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$, čímž dostaneme $L = \displaystyle\int_0^{\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right)}\operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u =$ $= \dfrac{1}{2}\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right)+\left[\dfrac{\operatorname{sh} 2u}{4}\right]_0^{\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right)}$. Jelikož $\operatorname{sh} x$ je inversní vůči $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, uděláme dobře, když napíšeme $\operatorname{sh} 2u =$ $= 2\operatorname{sh} u\operatorname{ch} u = 2\operatorname{sh} u\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}$, což znamená, že konečně dostaneme $\dfrac{1}{2}\ln\left(2h+\sqrt{4h^2+1}\right)+h\sqrt{4h^2+1}$. **Ad 2.** Tady je $y = \pm(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$ a $y' = \mp x^{-1/3}\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}$. Zase budeme počítat jen čtvrtinu délky, takže máme $L = 4\displaystyle\int_0^a\sqrt{1+x^{-2/3}(a^{2/3}-x^{2/3})}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^a a^{1/3}x^{-1/3}\,\mathrm{d}x =$ $= 4a\cdot\dfrac{3}{2} = 6a$. **Ad 3.** Tady je $y' = \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$, takže délka je $L = \displaystyle\int_0^b\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x$. Položíme $\dfrac{x}{a} = u$, takže máme $L = a\displaystyle\int_0^{b/a}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\,\mathrm{d}u =$ $= a\displaystyle\int_0^{b/a}\operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = a\operatorname{sh}\frac{b}{a}$.

115. Rozkrájíme elipsoid na plátky podél osy x. Řízněme ho rovinou $x = x_0$ a zjistěme, jaký tvar řez bude mít. To uděláme snadno tak, že dosadíme do rovnice elipsoidu, která přejde na $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1-\dfrac{x_0^2}{a^2} = \dfrac{a^2-x_0^2}{a^2}$. Když teď vydělíme tím zlomkem na pravé straně, dostaneme rovnici $\left(\dfrac{y}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)^2+\left(\dfrac{z}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x_0^2}}\right)^2 = 1$, což je zase rovnice elipsy, a o té podle bodu 1 úlohy 113 víme, že má plochu π krát součin obou poloos. Poloosy jsou jmenovatele těch obrovských zlomků, takže plocha řezu je $\pi\dfrac{b}{a}\dfrac{c}{a}(a^2-x_0^2)$. No a teď nám stačí řezat všemi rovinami od $x_0 = -a$ až po $x_0 = a$ a sčítat tyto plochy krát $\mathrm{d}x$. Celkem tedy pro objem dostaneme $V = \dfrac{\pi bc}{a^2}\displaystyle\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$. Díky sudosti přepíšeme na $\dfrac{2\pi bc}{a^2}\displaystyle\int_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2\pi bc}{a^2}\left(a^3-\dfrac{a^3}{3}\right) = \dfrac{4}{3}\pi abc$.

116. Ve všech třech příkladech upotřebíme vztahy $V = \pi\displaystyle\int_a^b x^2\,\mathrm{d}z$ a $S = 2\pi\displaystyle\int_a^b x\sqrt{1+(x')^2}\,\mathrm{d}z$. **Ad 1.** Vyjádříme x, dostaneme $x = r\sqrt{\dfrac{a-z}{a}}$. Derivace je $x' = \dfrac{-r}{2\sqrt{a}\sqrt{a-z}}$. Objem spočítáme jako $V = \pi r\displaystyle\int_0^a\left(1-\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\pi r^2$. Povrch je $S = 2\pi\dfrac{r}{\sqrt{a}}\displaystyle\int_0^a\sqrt{a+\frac{r^2}{4a}-z}\,\mathrm{d}z$. Pod odmocninou je lineární funkce, takže můžeme hned integrovat a dostaneme $2\pi\dfrac{r}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{2}{3}\left[\left(a+\dfrac{r^2}{4a}\right)^{3/2}-\dfrac{r^3}{8a^{3/2}}\right]$, což snadno upravíme na $\dfrac{\pi r}{6a^2}[(4a^2+r^2)^{3/2}-r^3]$. **Ad 2.** Tady máme $x = R-\dfrac{R-r}{h^2}z^2$, což má derivaci $x' = -2z\dfrac{R-r}{h^2}$. Objem je $V = \pi\displaystyle\int_{-h}^{h}x^2\,\mathrm{d}z$, díky symetrii můžeme integrovat jen půl sudu, takže dostaneme $V = 2\pi\displaystyle\int_0^h\left[R^2-2Rz^2\frac{R-r}{h^2}+z^4\frac{(R-r)^2}{h^4}\right]\mathrm{d}z$. Mocniny se integrují snadno a po několika úpravách dostaneme výsledek $V = 2\pi h\dfrac{8R^2+4Rr+3r^2}{15}$. S povrchem je to ale mnohem horší. Zase integrujeme jen přes půl sudu, dostaneme $S = 4\pi\displaystyle\int_0^h\left(R-z^2\frac{R-r}{h^2}\right)\sqrt{1+4z^2\frac{(R-r)^2}{h^4}}\,\mathrm{d}z$. Abychom nějak znormalisovali tu odmocninu, položíme $\frac{2(R-r)}{h^2}z = u$. Tím je integrál převeden na $\frac{2\pi h^2}{R-r}\int\limits_0^{2(R-r)/h}\left(R-\frac{h^2}{4(R-r)}u^2\right)\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, což se rozpadne na dva typy integrálů: $\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ a $\int x^2\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Oba se vyřeší tím, že se v nich položí $x = \operatorname{sh} u$: ten první přejde na $\int \operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u \int \frac{1+\operatorname{ch}2u}{2}\,\mathrm{d}u$ a vyjde $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]+C$, ten druhý přejde na $\int \operatorname{sh}^2 u\operatorname{ch}^2 u\,\mathrm{d}u = \int\frac{\operatorname{ch}4u-1}{8}\,\mathrm{d}u$ a vyjde $\frac{1}{8}[x(1+x^2)^{3/2}+x^3\sqrt{1+x^2}-$ $-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)]+C$. Když tyto výsledky upotřebíme a hodně dlouho budeme upravovat, dostaneme nakonec příšerný vztah $S =$ $=\frac{2\pi h^2}{R-r}\left[\left(\frac{R}{2}+\frac{h^2}{32(R-r)}\right)\ln\frac{2(R-r)+\sqrt{4(R-r)^2+h^2}}{h}+\frac{1}{h^2}\sqrt{4(R-r)^2+h^2}\left(\frac{(R-r)^2}{2}+R(R-r)-\frac{1}{16h^2}\right)\right]$ (za správnost neručím!) **Ad 3.** Objem je $V=\pi\int\limits_{-\pi}^{2\pi/3}\left(1-\sin z+\frac{\sin^2 z}{4}\right)\mathrm{d}z$. Přepíšeme $\sin^2 z$ na $\frac{1-\cos 2z}{2}$ a už se to snadno integruje na $\pi\left(\frac{15}{8}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{32}\right)$.

117. Objem je prostě roven $\int\limits_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$, kde a a b označují začátek a konec tělesa. Je tedy $h = b-a$. Integrál spočteme a dostaneme $V=\frac{A}{3}(b^3-a^3)+\frac{B}{2}(b^2-a^2)+C(b-a)$. Z toho všeho lze vytknout $b-a=h$ a také šestku. Vytkněme to tedy a dostaneme $V=\frac{b-a}{6}\left[2A(a^2+ab+b^2)+3B(a+b)+6C\right]$. Z druhé strany si zapišme $S_0=Aa^2+Ba+C$, $S_1=Ab^2+Bb+C$ a $S_{1/2}=\frac{A}{4}(a^2+2ab+b^2)+$ $+\frac{B}{2}(a+b)+C$ a pokusme se výraz $2A(a^2+ab+b^2)+3B(a+b)+6C$ vyrobit jako lineární kombinaci $\alpha S_0+\beta S_1+\gamma S_{1/2}$. Teď se ptejme: kolik C bude v tomto součtu? Je jasné, že $\alpha+\beta+\gamma=6$. Kolik tam bude Aab? To může pocházet jedině z $S_{1/2}$, kde je tento člen 1/2-krát, takže musíme vzít $\gamma=4$. Nakonec Ba i Bb má být stejně, takže $\alpha=\beta$. Z toho už dostáváme $\alpha=\beta=1$, $\gamma=4$, což jsme potřebovali.

118. **Ad 1.** Voda odtéká v každém okamžiku rychlostí $v=\sqrt{2gh}$, takže za čas $\mathrm{d}t$ se objem vody v nádobě sníží o $Sv\,\mathrm{d}t$, kde S je plocha díry ve dně. Proto je $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-S\sqrt{2gh}$. Řekněme, že nádobu vytvoříme rotací křivky $x=x(z)$ kolem osy z. To pak znamená, že když zvýšíme výšku hladiny o $\mathrm{d}h$, zvýší se objem o $\pi x(h)^2\mathrm{d}h$. Proto můžeme také psát $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}V}=\frac{1}{\pi x(h)^2}$. Nakonec víme, že rychlost snižování hladiny $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ má být konstantní. Označme si ji třeba $-w$ (voda klesá, proto je derivace záporná). Z řetězového pravidla máme $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-w=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{S\sqrt{2gh}}{\pi x(h)^2}$. Z toho už stačí vyjádřit naši funkci $x(h)$, takže hnedle dostaneme předpis $x=\sqrt{\frac{\sqrt{2g}S}{\pi w}\sqrt{h}}$, takže nádoba má mít tvar $x=A\sqrt[4]{h}$, kde $A=\sqrt{\frac{\sqrt{2g}S}{\pi w}}=\text{const.}$ **Ad 2.** Hladina klesá rovnoměrně rychlostí $-w$, takže když nalijeme vodu do výšky H, po čase t bude voda sahat jen do výšky $H-wt$. Chceme-li tedy odměřit čas t, musíme nalít vodu do výšky wt. w lze vyjádřit z konstanty A (ta je daná tím, jak je nádoba udělaná) jako $w=\frac{\sqrt{2g}S}{\pi A^2}$. **Ad 3.** Chceme-li, aby nádoba nalitá po okraj odměřila čas t, musí být vysoká wt. Chceme-li znát objem, musíme spočítat integrál $V=\pi\int\limits_0^{wt}x(z)^2\,\mathrm{d}z=\pi\int\limits_0^{wt}A^2\sqrt{z}\,\mathrm{d}z=\pi A^2\cdot\frac{2}{3}(wt)^{3/2}$. Teď sem musíme dosadit za w jako v minulém bodě, což nakonec dá fantastický výsledek $V=\frac{2^{7/4}g^{3/4}S^{3/2}t^{3/2}}{\sqrt{\pi}A}$.

119. **Ad 1. Tento ne.** Integrand je sudý a vesměs kladný, takže to nula jistě není. **Ad 2. Tento ano.** Integrand je lichý a integruje se na intervalu, který je symetrický vůči počátku. **Ad 3. Tento ano.** Integrand je lichý a integruje se na symetrickém intervalu. **Ad 4. Tento ne.** Integrand je vesměs kladný, takže se nemůže naintegrovat nula. **Ad 5. Tento ano.** Integruje se přes celou periodu. Když rozepíšeme $\sin^3$ a $\cos^3$ podle Eulerova vzorce, vidíme, že se integrál rozpadne na součet $\mathrm{e}^{\pm 3\mathrm{i}x}$ a $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}x}$. To se obojí ovšem integruje na nulu.

120. Zařídíme se podle nápovědy a zapíšeme $\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^\infty\frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. V prvním integrálu položíme $x=1/y$, čímž integrál přejde na $-\int\limits_1^\infty\frac{\ln y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$. To je přesně totéž jako ten druhý sčítanec, jenom s mínusem. Oba se tedy zruší a integrál je roven nule. Pokud jde o $\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, v něm vytkneme a^2, takže dostaneme $\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\frac{\mathrm{d}x}{a}$. Položme $u=x/a$. Meze se tím nezmění, takže dostaneme $\frac{1}{a}\int\limits_0^\infty\frac{\ln ua}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$. Teď rozepíšeme $\ln ua=\ln u+\ln a$ a integrál se rozpadne na součet $\int\limits_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, což už víme, že je nula, a

$\frac{\ln a}{a}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi \ln a}{2a}$.

121. **Ad 1.** Když položíme $u = \frac{\pi}{2} - x$, tak se stane toto: meze se prohodí, ale kvůli mínusu z diferenciálu se prohodí zase zpátky. Celkem se tedy nezmění. Za druhé, ze sinu se stane kosinus a opačně. Takže když si náš integrál označíme jako I, dostaneme $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$. Když tyto dva výrazy sečteme, dostaneme $2I = \int\limits_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, a proto je $I = \frac{\pi}{4}$. **Ad 2.** Když položíme $u = \pi - x$, sinus se nezmění a kosinus změní znamení. Celkem tedy dostaneme $I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$. Opět oba výrazy sečteme a dostaneme prostě $2I = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$, v čemž můžeme provést snadno substituci $\cos x = u$ a dostaneme $2I = \pi \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2}$. Výsledek je tedy $I = \frac{\pi^2}{4}$. **Ad 3.** Tohle je opět stejná pohádka: zjistíme, že je $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$. Sečteme obojí a dostaneme $2I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$. Uděláme substituci $u = x - \pi/4$, pak použijeme sudost integrandu a dostaneme $\sqrt{2} \int\limits_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$. Rozšíříme $\cos u = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 u}}$ a položíme $\mathrm{tg}\, u = y$, čímž integrál přejde na $\sqrt{2} \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = \sqrt{2} \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. Výsledek je tedy $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **Ad 4.** Zařídíme se podle nápovědy a položíme $x = \mathrm{tg}\, u$, čímž integrál přejde v $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+\mathrm{tg}\, u)\,\mathrm{d}x$. Nyní položíme $u = \frac{\pi}{4} - v$ a tím se dozvíme, že rovněž platí $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln\left(1+\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - v)\right)\mathrm{d}v$. Dosadíme $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - v\right) = \frac{1-\mathrm{tg}\, v}{1+\mathrm{tg}\, v}$ a dostaneme $I = \int\limits_0^{\pi/4} \ln \frac{2}{1+\mathrm{tg}\, v}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi \ln 2}{4} - I$, z čehož už hbitě spočteme $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$. **Ad 5.** Stejně jako v předchozích bodech zjistíme, že je $I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x\,\mathrm{d}x$. Když tyto integrály sečteme, dostaneme $2I = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} (\ln \sin 2x - \ln 2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln \sin x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi \ln 2}{2}$. Ovšem sinus je vlevo od $\pi/2$ stejný jako vpravo. Proto je $\int\limits_0^{\pi} \ln \sin x = 2I$ a celkem máme $2I = I - \frac{\pi \ln 2}{2}$, z čehož už vidíme výsledek $I = \frac{\pi \ln 2}{2}$.

122. **Ad 1.** Tady stačilo použít vztah pro součet geometrické posloupnosti. **Ad 2.** Po provedení obou řečených záměn dostaneme $\int\limits_0^n \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y$. To rozepíšeme na $H_n = \int\limits_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y + \int\limits_1^n \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y$. **Ad 3.** Opět rozdělíme integrály a dostaneme $H_n = \int\limits_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y - \int\limits_1^n \frac{\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y + \int\limits_1^n \frac{\mathrm{d}y}{y}$. Posledně jmenovaný integrál je opravdu roven $\ln n$. **Ad 4.** Tady upotřebíme slavnou limitu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-y}$. Pak máme $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int\limits_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y - \int\limits_1^n \frac{\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{y}\,\mathrm{d}y\right] = \int\limits_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{y}$. První integrál vypadá, že by mohl divergovat v nule, ale když rozvineme $\mathrm{e}^{-y} = 1 - y + y^2/2 - \cdots$, zjistíme, že se jedničky odečtou a integrál se chová slušně. Druhý konverguje určitě, protože integrand je součinem e^{-y}, které klesá superrychle, a to je ještě násobené další klesající funkcí. Oba integrály tedy skutečně konvergují k nějakému číslu, a to je ta Eulerova-Mascheroniho konstanta $\gamma \approx 0{,}577\,216\ldots$.