1 Následující rovnice řešte pomocí variace konstant. **Body 4 a 5 řešte jen v případě, že Vám zůstane čas!**

1. $y' = 6xy + 4x\mathrm{e}^{3x^2}$; **2.** $y' \cos x = (y + 2\cos x)\sin x$; **3.** $y'\mathrm{e}^{x^2} + 2xy\mathrm{e}^{x^2} = \cos x$; **4.** $y' = \frac{1}{x-y^2}$; **5.** $y' = \frac{1}{\mathrm{e}^{-y}-x}$.

Nápověda: Někdy je lepší vzít převrácenou hodnotu celé rovnice a spočítat x jako funkci y.

Řešení. Ad 1. Nejdřív vyřešíme jen rovnici $y' = 6xy$; tu separujeme a dostaneme $y = C\mathrm{e}^{3x^2}$. Teď počítáme, že C je funkce x a derivujeme: $y' = C'\mathrm{e}^{3x^2} + 6xC\mathrm{e}^{3x^2}$. Dosadíme-li to do původní rovnice, máme $C'\mathrm{e}^{3x^2} + 6xC\mathrm{e}^{3x^2} = 6xC\mathrm{e}^{3x^2} + 4x\mathrm{e}^{3x^2}$. Členy s C se zruší (takže asi počítáme dobře) a máme $C' = 4x$, tedy $C = 2x^2 + D$, takže celkem máme řešení $y = (2x^2 + C)\mathrm{e}^{3x^2}$.

Ad 2. Nejdřív vydělíme $\cos x$ a dostaneme $y' = y \operatorname{tg} x + 2\sin x$. Nejdřív řešíme jen $y' = y\operatorname{tg} x$, dostaneme řešení $\ln|y| = -\ln|\cos x| + C$, takže $y = \frac{C}{|\cos x|} = \frac{C}{\cos x \operatorname{sgn}(\cos x)}$. Derivujme s tím, že C bereme jako funkci x; dostaneme $y' = \frac{C'}{\cos x \operatorname{sgn}(\cos x)} + \frac{C \sin x}{\cos^2 x \operatorname{sgn}(\cos x)}$. Dosadíme to do původní rovnice a máme $\frac{C'}{\operatorname{sgn}\cos x} + \frac{C\sin x}{\cos x \operatorname{sgn}\cos x} = \frac{C\sin x}{\cos x\operatorname{sgn}\cos x} + 2\sin x\cos x$. Členy s C se ruší a máme konečně $C' = 2\sin x\cos x\operatorname{sgn}\cos x = \sin 2x \operatorname{sgn}\cos x$, což dá po integraci $C = D - \frac{1}{2}\cos 2x \operatorname{sgn}\cos x$. Celkem je tedy výsledek $y = \frac{D}{|\cos x|} - \frac{\cos 2x}{2\cos x}$.

Ad 3. Nejdřív řešíme jen rovnici $y'\mathrm{e}^{x^2} + 2xy\mathrm{e}^{x^2} = 0$. Exponenciála se zruší a máme $y' = -2xy$, což se hned integruje na $\ln|y| = C - x^2$, tedy $y = C\mathrm{e}^{-x^2}$. Považujeme C za funkci x a derivujeme: dostaneme $y' = \mathrm{e}^{-x^2}(C' - 2xC)$. To dosadíme do původní rovnice, obdržíme $C' - 2xC + 2xC = \cos x$, takže $C = \sin x + D$. Celkem tedy máme $y = (\sin x + C)\mathrm{e}^{-x^2}$.

Ad 4. Tady je lepší místo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x-y^2}$ vzít převrácenou hodnotu $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x - y^2$ a počítat x jako funkci y. Stačí nám tedy počítat $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x$, což dává hned $x = C\mathrm{e}^y$, derivovat na $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^y(C' + C)$, a dostaneme $\mathrm{e}^y(C' + C) = C\mathrm{e}^y - y^2$. Po zkrácení máme $C' = -y^2\mathrm{e}^{-y}$. Po dvojím per partes dostaneme $C = \mathrm{e}^{-y}(y^2 + 2y + 2) + D$, takže konečně máme $x = D\mathrm{e}^y + y^2 + 2y + 2$.

Ad 5. Opět je lepší vzít převrácenou hodnotu $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^{-y} - x$ a počítat x jako funkci y. Nejdřív spočítáme rovnici $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -x$, což dá prostě $x = C\mathrm{e}^{-y}$. Spočteme derivaci, jako by C bylo funkcí y: máme $x' = \mathrm{e}^{-y}(C' - C)$. Po dosazení obdržíme $\mathrm{e}^{-y}(C' - C) = \mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y}C$, což dá $C' = 1$, takže $C = y + D$. Tím dostáváme řešení $x = (y + D)\mathrm{e}^{-y}$.

2 Řešte následující rovnice substitucí $z = ax + by + c$ pro některé konstanty a, b, c:

1. $y' + y = 2x + 3$; **2.** $y' = (6x + 2y + 3)^2$; **3.** $y' = \cos(x + y + 3)$.

Pozor! Musíte přepočítat i derivaci y' na z'!

Řešení. Ad 1. Převedeme na jednu stranu, máme $y' = 2x - y + 3$. Položíme $z = 2x - y + 3$, derivace je $z' = 2 - y' = 2 - z$, což se snadno separuje na $\frac{\mathrm{d}z}{2-z} = \mathrm{d}x$, takže dostáváme $-\ln|2 - z| = x + C$ čili $2 - z = \frac{C}{x}$. Opět dosadíme za z a konečně dostáváme $y = 2x + 1 + \frac{C}{x}$.

Ad 2. Opět položíme $z = 6x + 2y + 3$, což se derivuje na $z' = 6 + 2y' = 6 + 2z^2$. Separace dá $\frac{\mathrm{d}z}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6\mathrm{d}x$, což se snadno integruje na $\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{3}} = 6x + C$. Z toho vydolujeme $z = \sqrt{3}\operatorname{tg}(2\sqrt{3}x + C)$ a z toho dostaneme $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}(2\sqrt{3}x + C) - 3x - \frac{3}{2}$.

Ad 3. Zas položíme $z = x + y + 3$, derivace je $z' = 1 + y' = 1 + \cos z$, to přejde na $\frac{\mathrm{d}z}{1+\cos z} = \frac{\mathrm{d}z}{2\cos^2\frac{z}{2}} = \mathrm{d}x$. Integrujeme, obdržíme $\operatorname{tg}\frac{z}{2} = x + C$ a z toho konečně $y = 2\operatorname{arc\,tg}(x + C) - x - 3$.

3 U rovnic ve tvaru $y' = f(y/x)$ zase bývá rozumné klást $y = ux$. Díky tomu vyřešte následující rovnice:
1. $2xy' = y + x$; **2.** $(x^2 - xy)y' + y^2 = 0$; **3.** $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$.

Řešení. Když klademe $y = ux$, tak bude $y' = u'x + u$. To se nám bude hodit ve všech čtyřech příkladech. **Ad 1.** Zkrátíme x a dostaneme $2y' = 1 + \frac{y}{x}$. Položíme $y = ux$, dostaneme $2(u'x + u) = 1 + u$, což dá $2u'x = 1 - u$. Separujeme na $\frac{2\,\mathrm{d}u}{1-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ a to můžeme integrovat na $(1-u)^2 = \frac{C}{x}$ neboli $u = 1 \pm \frac{C}{\sqrt{x}}$. $\pm$ pohltí konstanta a zůstane $y = x + C\sqrt{x}$.

Ad 2. Upravíme na $y' = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{1}{\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^2}$. Tady bude dobré vzít převrácenou hodnotu, takže dostaneme $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^2$. Teď budeme počítat x jako funkci y. Položíme $x = uy$ a obdržíme $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}y + u = u - u^2$, což se separuje na $-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$. Integrujeme a získáme $\frac{1}{u} = \ln|y| + C$, takže když položíme $u = x/y$, dostaneme $\frac{y}{x} = \ln|y| + C$. To už bohužel víc upravit nejde.

Ad 3. Upravíme na $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$, položíme $y = ux$ a máme $u'x + u = u \ln u + u$. To se trochu zkrátí a máme $\frac{\mathrm{d}u}{u \ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, což po integraci dá $\ln|\ln u| = \ln|x| + C$ čili $\ln u = C|x|$ čili $y = x\mathbf{e}^{C|x|}$.

4 Řešte následující rovnice:
1. $y'' - 16y = 0$; **2.** $y'' + 7y' - 8y = 0$ při počátečních podmínkách $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$; **3.** $y''' + y'' - y' - y = 0$; **4.** $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$; **5.** $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$.

Řešení. Ad 1. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 16 = 0$, což má kořeny $\lambda = \pm 4$. Proto řešení píšeme ve tvaru $y = A\mathbf{e}^{4x} + B\mathbf{e}^{-4x}$.

Ad 2. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0$, což má kořeny -8 a 1. Řešení má tedy tvar $y = A\mathbf{e}^{x} + B\mathbf{e}^{-8x}$. Teď zohledníme počáteční podmínky: při $x = 0$ má být $y = 1$, takže má platit $1 = A + B$. Podobně má být při $x = 0$ také $y' = 1$, takže po derivování dostaneme $A - 8B = 1$. To je soustava 2×2. Nejdřív rovnice odečteme a dostaneme $9B = 0$, takže dál už snadno zjistíme $A = 1$. Žádané řešení je tedy $y = \mathbf{e}^x$.

Ad 3. Charakteristická rovnice je $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Povšimneme si, že tato rovnice má kořen $\lambda = 1$. Provedeme dělení a polynom se rozpadne na součin $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2 = 0$. Máme tedy jednoduchý kořen 1 a dvojnásobný -1. Proto má řešení tvar $y = A\mathbf{e}^{x} + (Bx + C)\mathbf{e}^{-x}$.

Ad 4. Charakteristická rovnice je $\lambda^4 + 10\lambda^2 + 25 = 0$. Všimneme si, že vlevo stojí úplný čtverec a rovnici zapíšeme jako $(\lambda^2 + 5)^2 = 0$. Proto tedy máme dva rozličné kořeny, $\pm\mathrm{i}\sqrt{5}$, oba dvojnásobné. Proto má řešení tvar $y = (Ax + B)\cos\sqrt{5}x + (Cx + D)\sin\sqrt{5}x$.

Ad 5. Zde je charakteristická rovnice $\lambda^7 + 2\lambda^5 + \lambda^3 = 0$. Vytkneme a dostaneme $\lambda^3(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) = \lambda^3(\lambda^2 + 1)^2 = 0$. Máme tedy trojnásobný kořen 0 a dvojnásobné kořeny $\pm\mathrm{i}$. Proto je řešení ve tvaru $y = Ax^2 + Bx + C + (Dx + E)\cos x + (Fx + G)\sin x$.

5 Řešte následující rovnice s pravou stranou:
1. $y'' - 2y' + y = 1$; **2.** $y'' - y = x^3$; **3.** $y'' - 2y' = 4x + 2\cos 2x$; **4.** $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 + 17\sin x$; **5.** $y'' + y = \mathbf{e}^x \cos x$.

Řešení. Ad 1. Rovnice bez pravé strany má řešení $y = (Ax + B)\mathbf{e}^x$. Partikulární řešení uhodneme jako prostou jedničku — derivace ji zničí a v y zůstane. Celkem tedy máme $y = (Ax + B)\mathbf{e}^x + 1$.

Ad 2. Rovnice bez pravé strany má řešení $y = A\mathbf{e}^x + B\mathbf{e}^{-x}$. Napravo je nějaký polynom, tak partikulární řešení hádejme jako nějaký polynom třetího stupně. Je jasné, že druhá derivace takového polynomu obsahuje jen nejvýše první mocniny x, takže u x^3 musí být -1 a u x^2 musí být 0. Hádejme tedy

$y = -x^3 + \alpha x + \beta$. Dosadíme a máme $-6x + x^3 - \alpha x - \beta = x^3$, takže $\alpha = -6$ a $\beta = 0$. Proto máme konečné řešení $y = A\mathbf{e}^x + B\mathbf{e}^{-x} - x^3 - 6x$.

Ad 3. Rovnice bez pravé strany má řešení $y = A + B\mathbf{e}^{2x}$. Když má pravá strana několik sčítanců, stačí hádat partikulární řešení ke každému zvlášť a pak to sečíst. Takže pro $4x$ hádáme nějaký polynom. Stačí lineární? Ne, protože vlevo by se pak $4x$ vůbec nemohlo objevit (nultá derivace tam není). Dáme tedy kvadratický. U x^2 musí být -1, takže hádáme $y = -x^2 + \alpha x$. Absolutní člen tam nemá cenu dávat, protože může být libovolný (viz integrační konstantu A). Takže po derivování máme $-2 + 4x - 2\alpha = 4x$ a tedy má být $\alpha = -1$. Toto partikulární řešení je tedy $-x^2 - x$. Podobně pro $2\cos 2x$ bude dobře tipovat nějakou kombinaci $\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$. Na levé straně máme $-4\alpha \cos 2x - 4\beta \sin 2x + 4\alpha \sin 2x - 4\beta \sin 2x = 2\cos 2x$. Chceme tedy $\alpha = \beta$ a $-4\alpha - 4\beta = -8\alpha = 2$, takže $\alpha = -1/4$. Proto tady máme $-\frac{1}{4}(\cos 2x + \sin 2x)$. Dáme to obojí dohromady a celkem máme řešení $y = A + B\mathbf{e}^{2x} - x^2 - x - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x$.

Ad 4. Rovnice bez pravé strany má řešení $y = A\mathbf{e}^x + B\mathbf{e}^{4x}$. Zase budeme hádat partikulární řešení zvlášť: pro $4x^2$ budeme hádat kvadratický polynom, který zjevně musí mít u x^2 jedničku, takže hádáme $x^2 + \alpha x + \beta$. Po dosazení máme $2 - 10x - 5\alpha + 4x^2 + 4\alpha x + 4\beta = 4x^2$. Má být $4\alpha = 10$, tedy $\alpha = \frac{5}{2}$, a dále $2 - 5\alpha + 4\beta = 0$, tedy $\beta = \frac{25}{8} - \frac{1}{2} = \frac{21}{8}$, a tak máme řešení $x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{21}{8}$. U sinu zas budeme hádat kombinaci sinu a kosinu, tedy $\alpha \cos x + \beta \sin x$. Po dosazení zjistíme, že $\alpha = 5/2$ a $\beta = 3/2$. Celkem máme řešení $y = A\mathbf{e}^x + B\mathbf{e}^{4x} + x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{21}{8} + \frac{5}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x$.

Ad 5. Rovnice bez pravé strany má řešení $y = A\cos(x + \varphi)$. Partikulární řešení budeme hádat ve tvaru $y = \mathbf{e}^x(\alpha \cos x + \beta \sin x)$. Po otravném derivování obdržíme $\mathbf{e}^x(2\beta \cos x - 2\alpha \sin x) + \mathbf{e}^x \alpha \cos x + {}$ $+ \mathbf{e}^x \beta \sin x = \mathbf{e}^x \cos x$. Z toho plynou rovnice $2\beta + \alpha = 1$ a $\beta = 2\alpha$, a tedy $\alpha = 1/5$, $\beta = 2/5$. Výsledek je tedy $y = A\cos(x + \varphi) + \frac{\cos x + 2\sin x}{5}$.