

I Řešte následující soustavy:

$$\text{I. } \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \dot{x} + x - 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0; \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x; \end{cases} \quad 4. \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x; \end{cases}$$



2 Zuřivost. Už máte analýsy plné zuby, a tak zlostně mrsknete svůj sešit na stůl. Hmotnost sešitu je m , v okamžiku dotyku se stolem má vodorovnou rychlost v_0 . Jak daleko po stole dojede, než se zastaví? Koefficient smykového tření mezi sešitem a stolem je f .

3 Děravý válec. Máte válec o poloměru R , v němž je nalita voda do výšky h_0 . V jeho dně se ovšem udělala kruhová díra o poloměru r , takže voda teď teče pryč. Popište, jak se mění výška hladiny ve válci v závislosti na čase. Jak dlouho bude trvat, než bude válec prázdný? **Nápověda:** Voda vytéká rychlostí $v = \sqrt{2gh}$, kde h je výška vody nad otvorem.

4 Vytápění. Představte si, že máte chatu se třemi místnostmi: sklepem, obývánkem a podkrovím. Venku je o stupňů Celsia a protože jste na chatě dlouho nebyli, je tato teplota i ve všech třech místnostech. V obývánku jsou našťastí kamna, v nichž rozděláte oheň. V dokonale izolované místnosti by tato kamna zvyšovala teplotu o 20 stupňů za hodinu. Ovšem tady teče teplo jak do ostatních místností, tak ven z chaty. Podle Newtona se je časová změna teploty rovna $k(T' - T)$ kde T je teplota v místnosti a T' je teplota v místě, kam teplo uniká. k je pro přechod mezi vnitřkem a vnějškem chaty rovno $\frac{1}{4} \text{ hod}^{-1}$ a pro přechody mezi místnostmi v chatě $\frac{1}{2} \text{ hod}^{-1}$. Určete teploty ve všech třech místnostech v závislosti na čase.

5 Koronavirus. Mějme N lidí, z nichž v čase $t = 0$ je x_0 nakažených. Každý nakažený může nakazit další lidi, ovšem jen ty, kteří dosud nakaženi nejsou. Rychlost šíření nákazy je tedy úměrná $x(N - x)$, tj. součinu počtu nakažených a počtu nenakažených; konstantu úměrnosti označte třeba k . Zjistěte, jak počet nakažených závisí na čase.

6 Otrávená jezírka. Tři stejná jezírka o objemu V jsou navzájem propojena stejnými kanály. Do prvního přitéká voda s průtokem Q (to je objem vody za jednotku času), ze třetího zase stejným průtokem odtéká. Někaký zloduch do prvního jezírka vylil kyanid o objemu v . Určete množství jedu ve všech třech jezírkách v závislosti na čase, předpokládáte-li, že se v každém jezírku jed okamžitě dokonale rozmíchá a že se voda nikde nehromadí, tj. z každého jezírka odtéká tolik, kolik přitéká.

7 Crusher. Někdy je potřeba zjistit, jaký tlak vyvíjí plyny při nějakém výbuchu. Takový starý dobrý způsob, jak to změřit, spočívá v následujícím: výbuch se provede v pancéřované komoře s pístem, který těsně naléhá na měděný váleček, tak řečený *crusher*. Tento váleček opět z druhé strany těsně přiléhá k nějaké dokonale tvrdé zdi. Tlak výbuchu p pak zatlačí na píst, jenž zabírá ve stěně komory plochu S , a ten stlačí crusher o nějakou délku x ; ovšem crusher tomu klade odpor silou $R = R_0 + kx$, kde R_0 a k jsou konstanty. Po výbuchu se crusher vyjme a změří se, o kolik se stlačil. Jak z toho spočítáte tlak p způsobený výbuchem? Tento tlak považujte za konstantní, změnu objemu komory při posunu pístu zanedbejte.

8 Skok s padákem. Vyskočili jste z letadla a teď padáte. V okamžiku otevření padáku jste padali rychlostí v_0 , Vaše hmotnost i s padákem je m . K zemi Vás táhne tíhová síla, proti ní účinkuje odporová síla vzduchu o velikosti $\frac{1}{2}CS\rho v^2$, kde C je asi 1,2, S plocha padáku a ρ hustota vzduchu. Určete mezní rychlost pádu w (tj. rychlost, při níž se tíhová a odporová síla vyrovnají). Potom spočtete rychlost pádu v závislosti na čase a další integrací rychlosti zjistíte i závislost vzdálenosti, kterou jste překonali, na čase. V čem se bude lišit Váš pád od padání mezní rychlostí, pokud budete padat hodně dlouho ($t \rightarrow \infty$)? Předpokládejte, že pořád padáte rychlostí $v < w$.