1 Pro která x není funkce $\ln x$ definována? Proč se v těchto x pokazí? Pokuste se najít nějaký důvod.

2 Jaká je parita následujících elementárních funkcí (tj. jsou liché, sudé, obojí nebo ani jedno)?
1. $\mathbf{e}^x$; **2.** $\arcsin x$.

3 Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $\mathcal{D}$ a funkci $g(x)$ s definičním oborem $\mathcal{E}$. Určete definiční obory následujících funkcí:

1. $f(x) \pm g(x)$. **2.** $f(x)g(x)$. **3.** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$;

4 Podle pravidel, jež jste si odvodili výše, určete definiční obory funkcí:
1. $\dfrac{x \ln x}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}}$; **2.** $\arccos \dfrac{2x + 5}{x + 3}$; **3.** $\arcsin(x^2 - 1) \arccos(3 - x^2)$.

5 Jakou paritu má: **1.** součet nebo rozdíl dvou funkcí; **2.** součin nebo podíl dvou funkcí, jestliže: **1.** obě funkce jsou sudé; **2.** obě funkce jsou liché; **3.** jedna je sudá a druhá lichá.

6 Pomocí odvozených pravidel či z definice určete paritu funkcí:
1. $\sin x \cos x$; **2.** $\dfrac{|x^3| \operatorname{arc\,tg} x}{x^5 + x^3 + x}$; **3.** $\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}$; **4.** $x^2 + x$.

Výraz typu $z = a + ib$, kde a a b jsou reálná čísla a i je tzv. *imaginární jednotka*, nazveme *komplexní číslo*. Imaginární jednotka je plně charakterisována vlastností $\mathrm{i}^2 = -1$.

Komplexní číslo se dá vyjádřit v „algebraickém“ tvaru, tj. $z = a + b\mathrm{i}$, kde a, b jsou reálná a nazývají se po řadě *reálná* a *imaginární část* čísla z. Značí se $\mathfrak{Re}\, z$ a $\mathfrak{Im}\, z$. Také se zavádí číslo *komplexně sdružené*, značené většinou $z^\star$ či $\overline{z}$. To se získá tak, že se u imaginární části otočí znamení, takže $(a + b\mathrm{i})^\star = a - b\mathrm{i}$.

7 Vypočtěte si těchto pár součinů (x a y jsou reálná čísla):
1. $(1 - 3\mathrm{i}) \cdot (-2 + 3\mathrm{i})$, **2.** $(-4 + \mathrm{i}) \cdot (-1 + 2\mathrm{i})$, **3.** $\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)$, **4.** $2(x + \mathrm{i}y)$, **5.** $(5 + 3\mathrm{i})(4 - 3\mathrm{i})$.

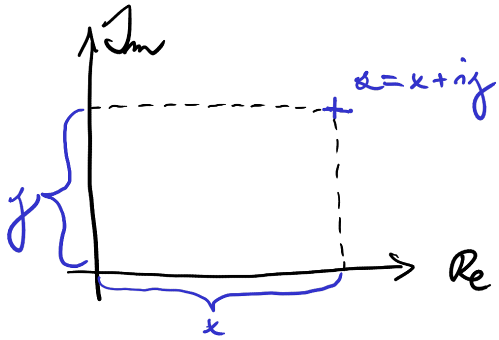
8 Co z následujících vztahů platí?
1. $\mathfrak{Re}(z + w) = \mathfrak{Re}\, z + \mathfrak{Re}\, w$; **2.** $\mathfrak{Re}(zw) = \mathfrak{Re}(z) \cdot \mathfrak{Re}(w)$; **3.** $\mathfrak{Re}\, \frac{z}{w} = \frac{\mathfrak{Re}\, z}{\mathfrak{Re}\, w}$.
Změní se něco, když místo $\mathfrak{Re}$ budeme psát $\mathfrak{Im}$?

Komplexních čísel $z = x + \mathrm{i}y$ bývá často lepší zapsat v takzvaném *polárním tvaru*, tedy ve tvaru

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i} \sin\varphi) = r\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

kde r je nezáporné reálné číslo a φ je rovněž reálné. Číslu r se pak říká *velikost* neboli *modul* čísla z a označuje se $|z|$; úhlu φ se říká *argument* čísla z a označuje se $\arg z$.

Symbol $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, který jsem uvedl výše, zatím berte prostě jako označení pro $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Později (ne nutně v tomto kursu) uvidíte, že definovat exponenciálu od komplexního čísla takto je jediná věc, která dává smysl.



9 Komplexní čísla se často kreslí do roviny: číslo $x + iy$ se prostě nakreslí jako bod $[x; y]$ v kartézských souřadnicích tak, jak je to na obrázku vpravo. Kde na tomto obrázku najdete $|z|$ a $\arg z$? Nakreslete je tem.

10 Odvoďte pro velikost a argument čísla $z = x + iy$ tyto vztahy:

1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; **2.** $\operatorname{tg} \arg z = \frac{y}{x}$.

Nepovinně můžete odvodit i tyto: **3.** $\cos \arg z = \frac{x}{|z|}$; **4.** $\sin \arg z = \frac{y}{|z|}$.

11 Kolik je $|e^{i\varphi}|$ pro jakékoli reálné φ?

12 Jestli se má $e^{i\varphi}$ chovat jako opravdová exponenciála, tak musí splňovat tuto základní podmínku:

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Ověřte to dosazením $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ atd. za všechny exponenciály. Pak roznásobte závorky a použijte součtové vzorce.

13 Jen s pomocí základní podmínky $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$ ukažte, že platí také:

1. $e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = 1$, z čehož vyplývá $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$; **2.** $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, kde n je přirozené; **3.** $\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi-\psi)}$ (použijte výsledek prvního bodu).

14 Čemu se rovná výraz $e^{2\pi i}$? A čemu $e^{2k\pi i}$, kde k je jakékoli celé číslo? Umíte z toho vyvodit, že exponenciála e^z je funkce s periodou $2\pi i$?

15 Jestliže jste zvládli všechna tato cvičení, můžete zas zapomenout vztahy z minulého cvičení. Tohle je mnohem účinnější, než si pamatovat haldy vzorců, které potřebujete jen málokdy.

Například máme $e^{2i\varphi} = (e^{i\varphi})^2$. Dosadíme $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ a máme

$$\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi.$$

Když porovnáte reálné a imaginární části, dostanete vztahy pro $\cos 2\varphi$ a $\sin 2\varphi$. Zkuste si podobně rychle odvodit vztahy pro:

1. $\cos 3\varphi$ a $\sin 3\varphi$ (použijte $e^{3i\varphi} = (e^{i\varphi})^3$); **2.** $\cos(a + b - c)$ a $\sin(a + b - c)$ (použijte $e^{i(a+b-c)} = e^{ia} \cdot e^{ib} \cdot e^{-ic}$); **3.** $\sin(a - 2b)$ a $\cos(a - 2b)$ (tady na to přijdete sami, ne?).

16 Ukažte, že $(re^{i\varphi})^\star = re^{-i\varphi}$: tedy komplexní sdružení nechává velikost být a u argumentu změní znamení.

17 Co z následujících vztahů platí? (Půjde to snáz, když z a w zapíšete v polárním tvaru.)

1. $(z + w)^\star = z^\star + w^\star$; **2.** $(zw)^\star = z^\star + w^\star$; **3.** $\left(\frac{z}{w}\right)^\star = \frac{z^\star}{w^\star}$; **4.** $(z^n)^\star = (z^\star)^n$.

18 Už víme, že když $z = x + iy$, tak $z^\star = x - iy$. Odvoďte z toho vztahy

$$\mathfrak{Re}\, z = \frac{z + z^\star}{2}, \qquad \mathfrak{Im}\, z = \frac{z - z^\star}{2i}.$$

Pak položte $z = e^{i\varphi}$. Měli byste dostat takzvané *Eulerovy vztahy*:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

19 Ukažte, že platí $zz^\star = |z|^2$. Dovedete z této formulky odvodit to, že $\frac{1}{z} = \frac{z^\star}{|z|^2}$?