

1 Pro která x nejsou definovány funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{ctg} x$? Proč se v těchto x pokazí? Pokuste se najít nějaký důvod.

2 Jaká je parita následujících elementárních funkcí (tj. jsou liché, sudé, obojí nebo ani jedno)?
1. x^{2k} , kde k je jakékoli celé číslo, tj. x^2 , x^4 , $1/x^2$ apod.; 2. $\operatorname{tg} x$.

3 Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem \mathcal{D} a funkci $g(x)$ s definičním oborem \mathcal{E} . Určete definiční obory následujících funkcí:

1. $f(x) \pm g(x)$. 2. $f(x)g(x)$. 3. $\frac{f(x)}{g(x)}$;

4 Podle pravidel, jež jste si odvodili výše, určete definiční obory funkcí:

1. $\frac{x \ln x}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}}$; 2. $\operatorname{arc} \cos \frac{2x + 5}{x + 3}$; 3. $\operatorname{arc} \sin(x^2 - 1) \operatorname{arc} \cos(3 - x^2)$.

5 Jakou paritu má: 1. součet nebo rozdíl dvou funkcí; 2. součin nebo podíl dvou funkcí, jestliže: 1. obě funkce jsou sudé; 2. obě funkce jsou liché; 3. jedna je sudá a druhá lichá.

6 Pomocí odvozených pravidel či z definice určete paritu funkcí:

1. $\sin x \cos x$; 2. $\frac{|x^3| \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x^5 + x^3 + x}$; 3. $e^x - e^{-x}$; 4. $x^2 + x$.

Výraz typu $z = a + ib$, kde a a b jsou reálná čísla a i je tzv. *imaginární jednotka*, nazveme *komplexní číslo*. Imaginární jednotka je plně charakterisována vlastností $i^2 = -1$.

Komplexní číslo se dá vyjádřit v „algebraickém“ tvaru, tj. $z = a + bi$, kde a , b jsou reálná a nazývají se po řadě *reálná* a *imaginární část* čísla z . Značí se $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$. Také se zavádí číslo *komplexně sdružené*, značené většinou z^* či \bar{z} . To se získá tak, že se u imaginární části otočí znamení, takže $(a + bi)^* = a - bi$.

7 Vypočtěte si těchto pár součinů (x a y jsou reálná čísla):

1. $(1 - 3i) \cdot (-2 + 3i)$, 2. $(-4 + i) \cdot (-1 + 2i)$, 3. $i(x + iy)$, 4. $2(x + iy)$, 5. $(5 + 3i)(4 - 3i)$.

8 Co z následujících vztahů platí?

1. $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$; 2. $\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Re}(w)$; 3. $\operatorname{Re} \frac{z}{w} = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}$.

Změní se něco, když místo Re budeme psát Im ?

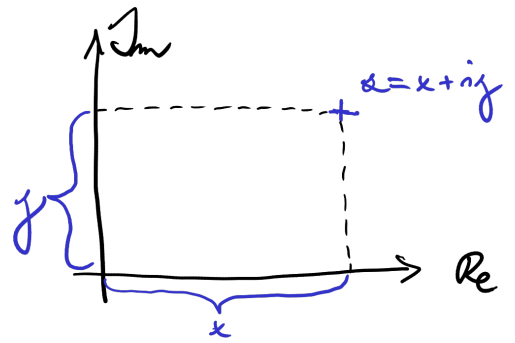
Komplexních čísel $z = x + iy$ bývá často lepší zapsat v takzvaném *polárním tvaru*, tedy ve tvaru

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi},$$

kde r je nezáporné reálné číslo a φ je rovněž reálné. Číslu r se pak říká *velikost* neboli *modul* čísla z a označuje se $|z|$; úhlu φ se říká *argument* čísla z a označuje se $\arg z$.

Symbol $e^{i\varphi}$, který jsem uvedl výše, zatím berte prostě jako označení pro $\cos \varphi + i \sin \varphi$. Později (ne nutně v tomto kursu) uvidíte, že definovat exponenciálu od komplexního čísla takto je jediná věc, která dává smysl.

9 Komplexní čísla se často kreslí do roviny: číslo $x + iy$ se prostě nakreslí jako bod $[x; y]$ v kartézských souřadnicích tak, jak je to na obrázku vpravo. Kde na tomto obrázku najdete $|z|$ a $\arg z$? Nakreslete je tem.



10 Odvoďte pro velikost a argument čísla $z = x + iy$ tyto vztahy:

1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; 2. $\operatorname{tg} \arg z = \frac{y}{x}$.

Nepovinně můžete odvodit i tyto: 3. $\cos \arg z = \frac{x}{|z|}$; 4. $\sin \arg z = \frac{y}{|z|}$.

11 Kolik je $|e^{i\varphi}|$ pro jakékoli reálné φ ?

12 Jestli se má $e^{i\varphi}$ chovat jako opravdová exponenciála, tak musí splňovat tuto základní podmínku:

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Ověřte to dosazením $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ atd. za všechny exponenciály. Pak roznásobte závorky a použijte součtové vzorce.

13 Jen s pomocí základní podmínky $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$ ukažte, že platí také:

1. $e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = 1$, z čehož vyplývá $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$; 2. $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, kde n je přirozené; 3. $\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi-\psi)}$ (použijte výsledek prvního bodu).

14 Čemu se rovná výraz $e^{2\pi i}$? A čemu $e^{2k\pi i}$, kde k je jakékoli celé číslo? Umíte z toho vyvodit, že exponenciála e^z je funkce s periodou $2\pi i$?

15 Jestliže jste zvládli všechna tato cvičení, můžete zas zapomenout vztahy z minulého cvičení. Tohle je mnohem účinnější, než si pamatovat haldy vzorců, které potřebujete jen málokdy.

Například máme $e^{2i\varphi} = (e^{i\varphi})^2$. Dosadíme $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ a máme

$$\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi.$$

Když porovnáte reálné a imaginární části, dostanete vztahy pro $\cos 2\varphi$ a $\sin 2\varphi$. Zkuste si podobně rychle odvodit vztahy pro:

1. $\cos 3\varphi$ a $\sin 3\varphi$ (použijte $e^{3i\varphi} = (e^{i\varphi})^3$); 2. $\cos(a + b - c)$ a $\sin(a + b - c)$ (použijte $e^{i(a+b-c)} = e^{ia} \cdot e^{ib} \cdot e^{-ic}$); 3. $\sin(a - 2b)$ a $\cos(a - 2b)$ (tady na to přijdete sami, ne?).

16 Ukažte, že $(re^{i\varphi})^* = re^{-i\varphi}$: tedy komplexní sdružení nechává velikost být a u argumentu změni znamení.

17 Co z následujících vztahů platí? (Půjde to snáz, když z a w zapíšete v polárním tvaru.)

1. $(z + w)^* = z^* + w^*$; 2. $(zw)^* = z^* + w^*$; 3. $(\frac{z}{w})^* = \frac{z^*}{w^*}$; 4. $(z^n)^* = (z^*)^n$.

18 Už víme, že když $z = x + iy$, tak $z^* = x - iy$. Odvoďte z toho vztahy

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}.$$

Pak položte $z = e^{i\varphi}$. Měli byste dostat takzvané *Eulerovy vztahy*:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

19 Ukažte, že platí $zz^* = |z|^2$. Dovedete z této formulky odvodit to, že $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$?