

**1** Pro která  $x$  nejsou definovány funkce  $\arcsin x$  a  $\arccos x$ ? Proč se v těchto  $x$  pokazí? Pokuste se najít nějaký důvod.

**2** Jaká je parita následujících elementárních funkcí (tj. jsou liché, sudé, obojí nebo ani jedno)?  
1.  $\sin x$ ;    2.  $\arctg x$ .

**3** Mějme funkci  $f(x)$  s definičním oborem  $\mathcal{D}$  a funkci  $g(x)$  s definičním oborem  $\mathcal{E}$ . Určete definiční obory následujících funkcí:

1.  $f(x) \pm g(x)$ .    2.  $f(x)g(x)$ .    3.  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ;

**4** Podle pravidel, jež jste si odvodili výše, určete definiční obory funkcí:

1.  $\frac{x \ln x}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}}$ ;    2.  $\arccos \frac{2x + 5}{x + 3}$ ;    3.  $\arcsin(x^2 - 1) \arccos(3 - x^2)$ .

**5** Jakou paritu má: 1. součet nebo rozdíl dvou funkcí;    2. součin nebo podíl dvou funkcí, jestliže: 1. obě funkce jsou sudé;    2. obě funkce jsou liché;    3. jedna je sudá a druhá lichá.

**6** Pomocí odvozených pravidel či z definice určete paritu funkcí:

1.  $\sin x \cos x$ ;    2.  $\frac{|x^3| \arctg x}{x^5 + x^3 + x}$ ;    3.  $e^x - e^{-x}$ ;    4.  $x^2 + x$ .

Výraz typu  $z = a + ib$ , kde  $a$  a  $b$  jsou reálná čísla a  $i$  je tzv. *imaginární jednotka*, nazveme *komplexní číslo*. Imaginární jednotka je plně charakterisována vlastností  $i^2 = -1$ .

Komplexní číslo se dá vyjádřit v „algebraickém“ tvaru, tj.  $z = a + bi$ , kde  $a, b$  jsou reálná a nazývají se po řadě *reálná* a *imaginární část* čísla  $z$ . Značí se  $\Re z$  a  $\Im z$ . Také se zavádí číslo *komplexně sdružené*, značené většinou  $z^*$  či  $\bar{z}$ . To se získá tak, že se u imaginární části otočí znamení, takže  $(a + bi)^* = a - bi$ .

**7** Vypočítejte si těchto pár součinů ( $x$  a  $y$  jsou reálná čísla):

1.  $(1 - 3i) \cdot (-2 + 3i)$ ,    2.  $(-4 + i) \cdot (-1 + 2i)$ ,    3.  $i(x + iy)$ ,    4.  $2(x + iy)$ ,    5.  $(5 + 3i)(4 - 3i)$ .

**8** Co z následujících vztahů platí?

1.  $\Re(z + w) = \Re z + \Re w$ ;    2.  $\Re(zw) = \Re(z) \cdot \Re(w)$ ;    3.  $\Re \frac{z}{w} = \frac{\Re z}{\Re w}$ .

Změní se něco, když místo  $\Re$  budeme psát  $\Im$ ?

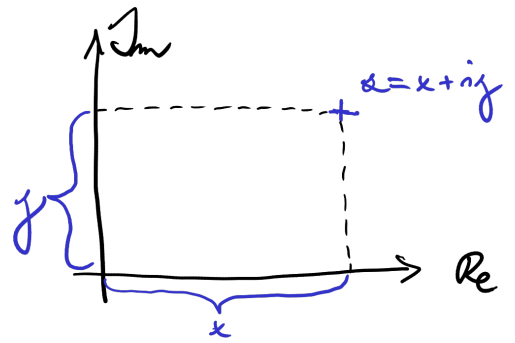
Komplexních čísel  $z = x + iy$  bývá často lepší zapsat v takzvaném *polárním tvaru*, tedy ve tvaru

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

kde  $r$  je nezáporné reálné číslo a  $\varphi$  je rovněž reálné. Číslo  $r$  se pak říká *velikost* neboli *modul* čísla  $z$  a označuje se  $|z|$ ; úhlu  $\varphi$  se říká *argument* čísla  $z$  a označuje se  $\arg z$ .

Symbol  $e^{i\varphi}$ , který jsem uvedl výše, zatím berte prostě jako označení pro  $\cos \varphi + i \sin \varphi$ . Později (ne nutně v tomto kursu) uvidíte, že definovat exponenciálu od komplexního čísla takto je jediná věc, která dává smysl.

**9** Komplexní čísla se často kreslí do roviny: číslo  $x + iy$  se prostě nakreslí jako bod  $[x; y]$  v kartézských souřadnicích tak, jak je to na obrázku vpravo. Kde na tomto obrázku najdete  $|z|$  a  $\arg z$ ? Nakreslete je tem.



**10** Odvoďte pro velikost a argument čísla  $z = x + iy$  tyto vztahy:

1.  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;      2.  $\operatorname{tg} \arg z = \frac{y}{x}$ .

Nepovinně můžete odvodit i tyto:      3.  $\cos \arg z = \frac{x}{|z|}$ ;      4.  $\sin \arg z = \frac{y}{|z|}$ .

**11** Kolik je  $|e^{i\varphi}|$  pro jakékoli reálné  $\varphi$ ?

**12** Jestli se má  $e^{i\varphi}$  chovat jako opravdová exponenciála, tak musí splňovat tuto základní podmínku:

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Ověřte to dosazením  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  atd. za všechny exponenciály. Pak roznásobte závorky a použijte součtové vzorce.

**13** Jen s pomocí základní podmínky  $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$  ukažte, že platí také:

1.  $e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = 1$ , z čehož vyplývá  $e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$ ;      2.  $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ , kde  $n$  je přirozené;      3.  $\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}} = e^{i(\varphi-\psi)}$  (použijte výsledek prvního bodu).

**14** Čemu se rovná výraz  $e^{2\pi i}$ ? A čemu  $e^{2k\pi i}$ , kde  $k$  je jakékoli celé číslo? Umíte z toho vyvodit, že exponenciála  $e^z$  je funkce s periodou  $2\pi i$ ?

**15** Jestliže jste zvládli všechna tato cvičení, můžete zas zapomenout vztahy z minulého cvičení. Tohle je mnohem účinnější, než si pamatovat haldu vzorců, které potřebujete jen málokdy.

Například máme  $e^{2i\varphi} = (e^{i\varphi})^2$ . Dosadíme  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  a máme

$$\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi.$$

Když porovnáte reálné a imaginární části, dostanete vztahy pro  $\cos 2\varphi$  a  $\sin 2\varphi$ . Zkuste si podobně rychle odvodit vztahy pro:

1.  $\cos 3\varphi$  a  $\sin 3\varphi$  (použijte  $e^{3i\varphi} = (e^{i\varphi})^3$ );      2.  $\cos(a + b - c)$  a  $\sin(a + b - c)$  (použijte  $e^{i(a+b-c)} = e^{ia} \cdot e^{ib} \cdot e^{-ic}$ );      3.  $\sin(a - 2b)$  a  $\cos(a - 2b)$  (tady na to přijdete sami, ne?).

**16** Ukažte, že  $(re^{i\varphi})^* = re^{-i\varphi}$ : tedy komplexní sdružení nechává velikost být a u argumentu změni znamení.

**17** Co z následujících vztahů platí? (Půjde to snáz, když  $z$  a  $w$  zapíšete v polárním tvaru.)

1.  $(z + w)^* = z^* + w^*$ ;      2.  $(zw)^* = z^* + w^*$ ;      3.  $(\frac{z}{w})^* = \frac{z^*}{w^*}$ ;      4.  $(z^n)^* = (z^*)^n$ .

**18** Už víme, že když  $z = x + iy$ , tak  $z^* = x - iy$ . Odvoďte z toho vztahy

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}.$$

Pak položte  $z = e^{i\varphi}$ . Měli byste dostat takzvané *Eulerovy vztahy*:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

**19** Ukažte, že platí  $zz^* = |z|^2$ . Dovedete z této formulky odvodit to, že  $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$ ?