1 Mějme výraz $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathbf{e}^{\mathrm{i}\psi}$. Vytkněte z obou sčítanců $\mathbf{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}}$. Tím byste měli dojít k rovnosti

$$\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathbf{e}^{\mathrm{i}\psi} = 2\mathbf{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

Nyní oddělte reálnou část a zjistěte, čemu se rovná $\cos\varphi + \cos\psi$. Pak oddělte imaginární část a zjistěte, čemu se rovná $\sin\varphi + \sin\psi$.

2 Řekněme, že α, β, γ jsou úhly v rovinném trojúhelníku. Dokažte vztah

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Zkuste vlevo za kosiny a siny dosadit podle Eulerových vzorců (viz úlohu 16 v předchozím pracovním listě). Nezapomeňte, že $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, takže mj. platí $\mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$, $\mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = -\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\gamma}$ apod.

---

3 Roznásobením se přesvědčte, že $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5+5\mathrm{i}$. Vezmete-li argument obou stran a uvážíte-li, že při násobení se argumenty sčítají, dostanete $\arg(2+\mathrm{i}) + \arg(3+\mathrm{i}) = \arg(5+5\mathrm{i})$, tj. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. Zvládli byste podobným způsobem ukázat, že platí $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{239}$?

4 Víte, jak se sčítá geometrická řada? Pro připomenutí: platí

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Zkuste teď dosadit $x = \mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Dokázali byste z toho dojít k následujícímu vztahu?

$$\mathbf{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\varphi)} + \mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha+2\varphi)} + \cdots + \mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha+(n-1)\varphi)} = \exp\left[\mathrm{i}\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi\right)\right]\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Vemte reálnou a imaginární část. Tím dokážete sečíst $\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cdots + \cos[\alpha+(n-1)\varphi]$ a též $\sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \cdots + \sin[\alpha+(n-1)\varphi]$.

---

5 Zatím jsme řešili jen siny a kosiny, ale můžeme se zabývat i tangentami. Můžeme totiž napsat

$$\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi \cdot (1 + \mathrm{i}\operatorname{tg}\varphi).$$

Všimněte si, že $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Im\mathfrak{m}\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\Re\mathfrak{e}\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}}$. Proto můžeme také psát

$$z = \mathbf{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)} = \mathbf{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathbf{e}^{\mathrm{i}\psi} = \cos\varphi\cos\psi(1+\mathrm{i}\operatorname{tg}\varphi)(1+\mathrm{i}\operatorname{tg}\psi).$$

Podělte imaginární a reálnou část posledního výrazu. Tím byste měli dostat

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi}.$$

Dovedete to zopakovat pro tři úhly a vyjádřit tím $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$?

6 Řekněme, že α, β, γ jsou úhly v rovinném trojúhelníku. Ukažte, že platí

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

a také

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

(Pomohou Vám k tomu vzorce z předchozího bodu.)