1 Všechny funkce, se kterými pracujeme, jsou téměř všude spojité, takže pro většinu bodů platí $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Blbě řečeno, „prostě do limity dosadíme a podíváme se, jestli není problém“. Zkuste si to na těchto příkladech:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3}{x+9}$; **2.** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{x^2+x+1}$.

2 Použijte „žebříček“ z předchozí aktivity k rychlému spočtení následujících limit:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$; **2.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+\mathrm{e}^x}$; **3.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$; **4.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x+3}}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+3}{2\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-17}$; **6.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1000000x}{x^2+1}$.

3 Na rozdíly typu „$\infty-\infty$“ je potřeba si dávat pozor. Vhodným rozšířením a použitím vzorce $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ spočtěte tyto limity: **1.** $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-x)$; **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$;

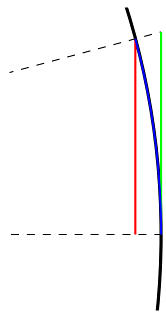
3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{a+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{a}\right)$ (zde $a \geq 0$); **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

4 Protože všechny elementární funkce jsou (skoro) všude spojité, můžeme bez problémů „vlézt“ s limitou dovnitř takových funkcí. Tedy $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$. Zkuste si tak spočítat následující limity: **1.** $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+3}$; **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}-\dfrac{x+2}{2x+1}}$; **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}-\ln\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

5 Podle principu z předchozí úlohy můžeme často pohodlně spočítat limity, ve kterých se hodně násobí nebo umocňuje. Pomůže nám takováto finta: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\exp(\ln f(x)) = \exp\lim\limits_{x\to\infty}\ln f(x)$. Spočtěte tak tyto limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{a}$ (a je kladné); **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$; **3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$ (tohle je limita posloupnosti).

6 Koukněte se na obrázek (je na něm kus jednotkové kružnice). Vidíte z něho, že při $0 < x < \frac{\pi}{2}$ platí nerovnosti $\sin x < x < \operatorname{tg} x$? Pokud ne, prostě porovnejte dvě vyznačené délky a délku oblouku mezi oběma čárkovanými čarami. Pak tyto nerovnosti upravte na $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.



1. Vymyslete, proč tato nerovnost platí nejen při $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ale i při $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

2. Jak s pomocí nerovností ukážete, že $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$?

7 S pomocí limity z předchozího cvičení vypočtěte také následující:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (tady se bude hodit vztah $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$).

8 Pokud už máte všechny předchozí úlohy (1–7) vypočtené, dejte plyšáka na stůl!!!

9 Zaveďme následující označení: pokud platí $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, pak budeme prostě psát $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$. Vysvětlete, proč díky tomu pak můžete v jakékoli limitě, kde jde $x \to a$, volně nahrazovat $f(x)$ za $g(x)$ nebo obráceně.

$\boxed{10}$ Dokažte, že platí následující vztahy s vlnkou (nemusíte nic počítat znova, jsou to vesměs jen reformulace předchozích cvičení):

1. $\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b} \sim \frac{a-b}{2\sqrt{x}} \quad (x \to \infty)$; **2.** $\sin ax \sim \operatorname{tg} ax \sim ax \quad (x \to 0)$;
3. $\cos ax \sim 1 - \frac{a^2x^2}{2} \quad (x \to 0)$; **4.** $\arcsin ax \sim \operatorname{arc\,tg} ax \sim ax \quad (x \to 0)$.

$\boxed{11}$ Z přednášky víte, že $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}$. Ukažte, že platí rovněž $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}$. Položením $x = 1/u$ pak zjistíte, že platí též $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \mathbf{e}$. Pak pomocí toho dokažte, že při $x \to 0$ platí $\ln(1+ax) \sim ax$.

$\boxed{12}$ Zavlnkujte si a elegantně vyřešte následující limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x+\sin x}{1-\cos px+\sin px}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$; **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$; **4.** $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg} x}$. U některých se Vám může hodit „exp ln“ trik z úlohy 5.