Přibližné počítání

Pro připomenutí nabízím Taylorův vzorec:

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n.$$

Takto získané nekonečné řady mají často smysl jen pro některé hodnoty h. Obory platnosti těchto řad vždycky uvádím v závorce, ale to nemusíte dokazovat (to Vás čeká až za dva semestry).

Diferenciál funkce f je

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

1 Bez užití kalkulačky přibližně pomocí diferenciálu vyčíslete:
1. $\sqrt[3]{1{,}02}$; **2.** $\sin 29°$; **3.** $\operatorname{arc\,tg} 1{,}05$; **4.** $\frac{1}{2{,}07}$.
Zkuste to na 3 platné číslice přesně. (Některé konstanty: $\pi \approx 3{,}14$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$.)

2 Hodíte míč rychlostí $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pod úhlem $\alpha = 30°$ a dohodíte asi 8,83 m. Určete přibližně pomocí diferenciálu, oč dál dohodíte, pokud:
1. hodíte o 10 % vyšší rychlostí; **2.** hodíte pod úhlem o 5° větším.
(Z elementární fysiky byste už měli vědět, že dolet takového hodu je $x = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$.)

3 Rozviňte funkci $(1+x)^\alpha$ v nekonečnou řadu kolem bodu $x = 0$ ($|x| < 1$, α je libovolné reálné číslo).

4 Rozviňte funkci e^x v nekonečnou řadu kolem bodu $x = 0$ ($x \in \mathbb{R}$). Pak ji rozviňte v řadu kolem bodu $x = a$, kde a je jakékoli reálné číslo.

5 Rozviňte funkce $\sin x$ a $\cos x$ v nekonečné řady kolem bodu $x = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

6 Rozviňte funkci $\ln(1+x)$ v nekonečnou řadu kolem bodu $x = 0$ ($|x| < 1$).

7 Vhodným rozvojem pod znamením limity spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-x^2/2}}{x^4}$.

8 Přibližně upravte následující výrazy ($|x|$ berte jako malé oproti 1):
1. $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (do x^1); **2.** $\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$ (do x^4); **3.** $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{1/x}$ (do x^2).

9 Rozviňte $\operatorname{tg} x$ do řady (až do x^3) bez použití Taylorova rozvoje takto: řekněme, že $\operatorname{tg} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$, kde a_0 atd. jsou koeficienty, které zatím neznáme. Jelikož platí $\sin x = \cos x \operatorname{tg} x$, platí také

$$x - \frac{x^3}{6} + \cdots = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right).$$

Roznásobením součinu vpravo a porovnáním jednotlivých mocnin zjistěte hodnoty neznámých koeficientů a_k. Tím dostanete začátek rozvoje tangenty.