Sedmé cvičení (neurčité integrály)

Základní pravidla pro počítání integrálů

Několik užitečných faktů o integrování:

- Neurčitý integrál je opakem derivace, tj. když je $f' = g$, tak to znamená, že $\int g\,\mathrm{d}x = f$.
- Protože derivace konstanty je nula, musí se k výsledku integrování přičíst libovolná konstanta.
- Integrál je lineární: $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$, jsou-li α, β konstanty a f, g nějaké funkce.
- Integrace per partes: $\int f g'\,\mathrm{d}x = fg - \int f' g\,\mathrm{d}x$, kde f, g jsou funkce.
- Substituce: pokud chceme v integrálu přejít k jiné proměnné, musíme přepsat i $\mathrm{d}x$. S tím se zachází jako při derivování.

Tabulka integrálů: `https://is.muni.cz/auth/el/sci/podzim2020/M1100F/um/tabulka-derivaci-integralu.pdf`.

V této lekci nás bohužel nečeká nic jiného než integrování, integrování a zase integrování. Je to dovednost, která je na jednu stranu velmi potřebná, na druhou stranu spočívá na všelijakých tricích, které se musíte naučit. A to nejde jinak než počítáním.

86 Spočtěte tyto integrály:

1. $\int (3-x^2)^3\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$; **3.** $\int (1+\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int (2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x$.

87 Provedením lineární substituce vypočtěte následující integrály:

1. $\int (\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}$; **4.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$;

88 Rozbitím na součet vypočtěte integrály:

1. $\int x^2(2-3x^2)^2\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x}$; **4.** $\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

89 Pomocí rozličných jednoduchých substitucí spočtěte integrály:

1. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \frac{\mathrm{e}^x}{2+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$; **4.** $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; **6.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

7. $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$; **8.** $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$; **9.** $\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$; **10.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

90 Spočtěte následující integrály pomocí integrace per partes:

1. $\int x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **4.** $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x$, kde $\alpha \neq -1$ je reálný parametr;

6. $\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$; **7.** $\int \frac{x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$; **8.** $\int \ln^n x\,\mathrm{d}x$, n je přirozené číslo.

Nápověda: Ad 6. Co je lepší než per partes? Dvakrát per partes! **Ad 7.** $(x\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x(x+1)$. **Ad 8.** Co je lepší než per partes? n-krát per partes!

91 Užitím vhodných substitucí vypočtěte tyto integrály:

1. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,\mathrm{d}x$; **2.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$; **4.** $\int \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$; **5.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<x<b)$;

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$ $(a<b)$; **7.** $\int \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Nápověda: Ad 3. $x = a\operatorname{tg} u$. **Ad 4.** $x=\sin^2 u$. **Ad 5.** $x-a=(b-a)\sin^2 u$; **Ad 6.** $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 u$. **Ad 7.** $x=\operatorname{tg} u$.

Odpovědi a řešení

86. **Ad 1.** Rozvineme podle binomické věty: $\int (3-x^2)^3\,\mathrm{d}x = \int (27-27x^2+9x^4-x^6)\,\mathrm{d}x = 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{x^7}{7}+C$. **Ad 2.** Přičteme a odečteme jedničku: $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$. **Ad 3.** Integrujeme jednotlivé sčítance a dostaneme $x-\cos x+\sin x+C$. **Ad 4.** Rozepíšeme mocninu: $\int (2^x+3^x)^2\mathrm{d}x = \int (4^x+2\cdot 6^x+9^x)\mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$.

87. **Ad 1.** $\int (\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$. V prvním integrálu položíme $-x=u$, takže je $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$, v druhém integrálu dáme $-2x=u$, takže $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/2$. Celkem máme výsledek $-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-u}=\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$. **Ad 2.** Lineární substituce $u=2x-3$, dostaneme $\frac{1}{2}\int u^{10}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{u^{11}}{11}=\frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C$. **Ad 3.** Chceme se zbavit dvojky, takže ji vytkneme: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right)^2}}$. Teď položíme $u=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$ a máme $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin u=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+C$. **Ad 4.** Zapišme $\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Z toho je vidět, že je $1-\sin x = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$, takže hned máme $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$. Položíme $u=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$, takže výsledek je $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u}=-\operatorname{ctg} u=-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$.

88. **Ad 1.** $\int x^2(2-3x^2)^2\,\mathrm{d}x=\int(4x^2-12x^4+9x^6)\,\mathrm{d}x=\frac{4x^3}{3}-\frac{12x^5}{5}+\frac{9x^7}{7}+C$. **Ad 2.** Tady pomůže $\frac{1+x}{1-x}=-\frac{x+1}{x-1}=-1-\frac{2}{x-1}$. To už se snadno integruje na $-x-2\ln(x-1)+C$. **Ad 3.** Přerozložíme x^2 takto: $x^2=[(x+1)-1]^2=(x+1)^2-2(x+1)+1$. Pak máme $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x=\int\left(x+1-2+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)+C$. **Ad 4.** Tady přepíšeme x jako $-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}$. Tím dostaneme $\int x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}(2-5x)\right)\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\int(2-5x)^{1/2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{5}\int(2-5x)^{3/2}\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{75}(2-5x)^{3/2}+\frac{2}{125}(2-5x)^{5/2}+C$. **Ad 5.** Zase podobný trik: $x=-\frac{1}{3}(1-3x)+\frac{1}{3}$, takže náš integrál lze psát jako $\frac{1}{3}\int[(1-3x)^{-1/3}-(1-3x)^{2/3}]\,\mathrm{d}x=\frac{(1-3x)^{5/3}}{15}-\frac{(1-3x)^{2/3}}{6}+C$.

89. **Ad 1.** Klademe $\ln x=u$, $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}u$. Pak dostaneme $\int u^2\,\mathrm{d}u=\frac{u^3}{3}=\frac{\ln^3}{3}+C$. **Ad 2.** Položíme $\mathrm{e}^x=u$. Pak je i $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ a máme $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{2+u}=\ln(u+2)=\ln(\mathrm{e}^x+2)+C$. **Ad 3.** Dáme $x=\ln u$, $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{u}$. Dostaneme $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u+u^{-1})}=\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\operatorname{arctg} u=\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x+C$. **Ad 4.** Stačí položit $u=\sin x-\cos x$. Pak je $\mathrm{d}u=(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$, takže náš integrál přejde v $\int u^{-1/3}\,\mathrm{d}u$ a je tedy roven $\frac{3}{2}u^{2/3}=\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{2/3}+C$. **Ad 5.** Tady položíme $u=\operatorname{arctg} x$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ a máme prostě $\int u\,\mathrm{d}u=\frac{u^2}{2}=\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2}+C$. **Ad 6.** Tady je třeba klást $\arcsin x=u$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. Pak počítáme $\int u^{-2}\,\mathrm{d}u=-u^{-1}=-\frac{1}{\arcsin x}+C$. **Ad 7.** Položíme $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=u$, máme tedy $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$. Integrál přejde v $\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u=\frac{u^{3/2}}{3/2}=\frac{2}{3}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^{3/2}+C$. **Ad 8.** Oddělíme jeden sinus a přepíšeme $\sin^3 x=\sin^2 x\cdot\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x$. To se výborně hodí na substituci $\cos x=u$, $\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$. Integrál tedy vyjde $\int(u^2-1)\,\mathrm{d}u=\frac{u^3}{3}-u=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$. **Ad 9.** Podobně jako v předchozím bodě máme $\cos^5 x=(1-\sin^2 x)^2\cos x$, tj. $\int\cos^5 x\,\mathrm{d}x=\int(1-u^2)^2\,\mathrm{d}u=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C$. **Ad 10.** Jelikož $(\operatorname{ctg} x)'=-1/\sin^2 x$, měli bychom přepsat sinus pomocí kotangent. To se dá udělat takto: $\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$. Takže můžeme psát $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=-\int\frac{-\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}=-\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=$

$= \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) = \ln\left(\operatorname{ctg} x+\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}\right) = \ln\dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \ln\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+C.$

90. **Ad 1.** $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left\|\begin{matrix} \operatorname{arctg} x & \dfrac{1}{1+x^2} \\ x & \dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. V čitateli přičteme a odečteme jedničku, zlomek se rozpadne na $1-\dfrac{1}{1+x^2}$ a to už se snadno integruje. Výsledek je $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2}+C$. **Ad 2.** $\displaystyle\int\arcsin x\,\mathrm{d}x = \left\|\begin{matrix}\arcsin x & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ 1 & x\end{matrix}\right\| = x\arcsin x - \int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+C$. **Ad 3.** $\displaystyle\int x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left\|\begin{matrix} x^2 & 2x \\ x\mathrm{e}^{-x^2} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\end{matrix}\right\| = -\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + \int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2+1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C$. **Ad 4.** Derivováním zrušíme x: $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \left\|\begin{matrix} x & 1 \\ \sin x & -\cos x\end{matrix}\right\| = -x\cos x + \int\cos x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C$. **Ad 5.** $\displaystyle\int x^\alpha\ln x\,\mathrm{d}x = \left\|\begin{matrix}\ln x & x^{-1} \\ x^\alpha & \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{matrix}\right\| = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1}\right)+C$. **Ad 6.** Jak varuje nápověda, tady to bude chtít per partes použít dvakrát po sobě. Počítejme: $\displaystyle\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x = \left\|\begin{matrix}(\arcsin x)^2 & \dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 1 & x\end{matrix}\right\| = x(\arcsin x)^2 + \int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x = \left\|\begin{matrix}\arcsin x & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} & 2\sqrt{1-x^2}\end{matrix}\right\| = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$. **Ad 7.** Tady je potřeba oddělit $x\mathrm{e}^x$ to derivovat, jak upozorňuje nápověda: $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \left\|\begin{matrix} x\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x(x+1) \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & -\dfrac{1}{x+1}\end{matrix}\right\| = -\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^x + \int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}+C$.

Ad 8. Položme $x=\mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}x=\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Tím integrál přejde na $\displaystyle\int u^n\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Teď musíme použít per partes: u^n se derivuje na nu^{n-1} a e^u se integruje na e^u. Máme tedy $\displaystyle\int u^n\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u u^n - n\int u^{n-1}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. To je ale úplně stejný typ integrálu jako předtím. Scéna se tedy opakuje a konečně zjišťujeme, že integrál je roven $\displaystyle\mathrm{e}^u\left[u^n - nu^{n-1} + n(n-1)u^{n-2} - \cdots + (-1)^n n!\right] = C + (-1)^n n! x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\ln^k x}{k!}$.

91. **Ad 1.** Položíme $1-5x^2=u$, $\mathrm{d}u=-10x\,\mathrm{d}x$. Také vidíme, že je $x^2=\dfrac{1-u}{5}$. Pomocí toho všeho přepíšeme integrál na $\displaystyle-\frac{1}{10}\int\frac{1-u}{5}\cdot u^{10}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{50}\left(\frac{(1-5x^2)^{12}}{12}-\frac{(1-5x^2)^{11}}{11}\right)+C$. **Ad 2.** Položíme $2-x=u$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$. Tak integrál přejde na tvar $\displaystyle\int\frac{(2-u)^2}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \int(u^{3/2}-4u^{1/2}+4u^{-1/2})\mathrm{d}u = \frac{2(2-x)^{5/2}}{5}-\frac{8(2-x)^{3/2}}{3}+8\sqrt{2-x}+C$. **Ad 3.** Položíme $x=a\operatorname{tg} u$. Integrál tím přejde na $\displaystyle\int\frac{a(1+\operatorname{tg}^2 u)\,\mathrm{d}u}{(a^2\operatorname{tg}^2 u+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{1}{a^2}\int\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\sin u = \frac{1}{a^2}\frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} = \frac{1}{a^2}\frac{x/a}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+C$. **Ad 4.** Položíme $x=\sin^2 u$, $\mathrm{d}x=2\sin u\cos u$. Integrál pak přejde na $\displaystyle 2\int\sin^2 u\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\int\sin^2 2u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}\int(1-\cos 4u)\,\mathrm{d}u = \frac{u}{4}-\frac{\sin 4u}{16}$. Jelikož $\sin 4u = 4\sin u\cos^3 u - 4\sin^3 u\cos u = 4\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}(1-2\sin^2 u)$, shledáme po dosazení $\sin u=\sqrt{x}$, že je $\sin 4u = 4\sqrt{x(1-x)}(1-2x)$, a tak je konečný výsledek roven $\dfrac{1}{4}\arcsin\sqrt{x}-\dfrac{1}{4}\sqrt{x(1-x)}(1-2x)$. **Ad 5.** Tady použijeme podobnou logiku jako v předchozím bodě, jen je nutno položit $x-a=(b-a)\sin^2 u$. Pak také vidíme, že je $b-x=b-a-(x-a)=(b-a)(1-\sin^2 u)=(b-a)\cos^2 u$. Také máme $\mathrm{d}x=(b-a)2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u$. Dosadíme-li to do integrálu, dostaneme $\displaystyle\int\frac{(b-a)2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(b-a)\sin^2 u(b-a)\cos^2 u}} = \int\frac{(b-a)2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u}{(b-a)\sin u\cos u} = \int 2\,\mathrm{d}u = 2u$. No, to věru není složitý výsledek. Jen musíme obrátit rovnost $x-a=(b-a)\sin^2 u$, což dá $u=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$, takže celkem máme $2\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}+C$. **Ad 6.** Úplně stejně jako v předchozím bodě dostaneme výsledek $2u = 2\operatorname{arsh}\sqrt{\dfrac{x+a}{b-a}} =$

$= 2\ln\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}}+C$. **Ad 7.** Položíme $x = \operatorname{tg} u$, $\mathrm{d}x = (1+\operatorname{tg}^2 u)\,\mathrm{d}u$, tj. $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Proto dostaneme $\int \frac{\mathbf{e}^u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}\mathrm{d}u =$
$= \int \mathbf{e}^u \cos u\,\mathrm{d}u = \mathfrak{Re}\int \mathbf{e}^{(1+\mathrm{i})u}\,\mathrm{d}u = \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathbf{e}^{(1+\mathrm{i})u}\right) = \frac{\mathbf{e}^u}{\sqrt{2}}\cos\left(u-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arc\,tg} x}}{\sqrt{2}}\left(\cos u\cos\frac{\pi}{4}+\sin u\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arc\,tg} x}}{2}\frac{1+\operatorname{tg} u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}} =$
$= \frac{\mathbf{e}^{\operatorname{arc\,tg} x}}{2}\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.