1 Dokažte „hyperbolickou jedničku“ $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Řešení.

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{e}^{2x} + 2 + \mathbf{e}^{-2x} - \mathbf{e}^{2x} + 2 - \mathbf{e}^{-2x}\right) = 1.$$

2 Kružnici o poloměru R lze zadat rovnicí $x^2 + y^2 = R^2$, díky čemuž ji můžeme parametrisovat například takto: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$; to funguje díky vztahu $\sin^2 + \cos^2 = 1$.
Podobným způsobem využijte vztah $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ k parametrisaci hyperboly $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Tím by mělo být vysvětleno, proč se těmto funkcím říká hyperbolické.

Řešení. Zjevně zabere $x = a\operatorname{ch}^2 u$, $y = b\operatorname{sh}^2 u$, kde u je parametr hyperboly.

3 Vypočtěte derivace funkcí $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ a $\operatorname{th} x$ a vyjádřete je pomocí hyperbolických funkcí.

Řešení. Máme $\left(\frac{\mathbf{e}^x \pm \mathbf{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{\mathbf{e}^x \mp \mathbf{e}^{-x}}{2}$, takže platí $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ a obráceně $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$. Pak už snadno spočteme $(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\operatorname{sh} x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

4 Vyšetřete průběh funkcí $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ a $\operatorname{th} x$ a načrtněte jejich grafy (vyjděte z definice pomocí exponenciál).

5 Řešte rovnici $u = \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2}$. Tím zjistíte, jak se dá spočítat x ze zadané hodnoty $u = \operatorname{sh} x$. Zapište explicitní vztah pro inversní funkci k $\operatorname{sh} x$, která se označuje (mezi jinými) $\operatorname{ar\,sh} x$. Stejně vyjádřete i $\operatorname{ar\,ch} x$ a $\operatorname{ar\,th} x$.

Řešení. Vynásobíme celou rovnici $2\mathbf{e}^x$, čímž dostaneme $2u\mathbf{e}^x = (\mathbf{e}^x)^2 - 1$. To je kvadratická rovnice pro $\mathbf{e}^x$, která má řešení $\mathbf{e}^x = u \pm \sqrt{u^2+1}$. Znamení „$-$“ tady nedává smysl, protože $\mathbf{e}^x$ musí být vždycky kladné. Proto máme $x = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right)$ a také $\operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Obdobně dostaneme $\operatorname{ar\,ch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$ (tady jsou možné obě hodnoty, protože $\operatorname{ch} x$ je funkce dvojznačná (to je důsledek její sudosti) — můžete si též ověřit, že $x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$) a $\operatorname{ar\,th} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

6 Derivujte vztah $\operatorname{ar\,sh}(\operatorname{sh} x) = 1$ a položením $\operatorname{sh} x = y$ vyjádřete derivaci $\operatorname{ar\,sh} y$. Stejným způsobem nalezněte derivace $\operatorname{ar\,ch} x$ a $\operatorname{ar\,th} x$.

Řešení. Při derivování toho vztahu napravo vznikne nula a vlevo derivujeme podle řetězového pravidla. Dostaneme $\operatorname{ar\,sh}'(\operatorname{sh} x)\cdot\operatorname{ch} x = 0$, takže pro neznámou derivaci funkce $\operatorname{ar\,sh} x$ platí $\operatorname{ar\,sh}'(\operatorname{sh} x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$. Teď položíme $\operatorname{sh} x = y$ a dostaneme $\operatorname{ar\,sh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$. Stejně tak platí $(\operatorname{ar\,ch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ a $(\operatorname{ar\,th} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

7 Pokud jste vyřešili všechny předchozí úlohy, dejte plyšáka na stůl!

Řešení. To opravdu není těžké, to jistě zvládnete sami ☺

8 Ukažte, že platí následující vztahy mezi hyperbolickými a goniometrickými funkcemi: **1.** $\sin \mathrm{i}x = \mathrm{i} \operatorname{sh} x$; **2.** $\operatorname{sh} \mathrm{i}x = \mathrm{i} \sin x$; **3.** $\cos \mathrm{i}x = \operatorname{ch} x$; **4.** $\operatorname{ch} \mathrm{i}x = \cos x$; **5.** Napište obdobné vztahy pro funkce $\operatorname{th} x$ a $\operatorname{tg} x$.

Řešení. Víme, že např. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ a $\sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$. Z toho je např vidět vztah $\frac{\operatorname{sh} \mathrm{i}x}{\mathrm{i}} = \sin x$, což po násobení i dá druhý vzorec. Dosadíme-li do něj $x = -\mathrm{i}u$, obdržíme $-\operatorname{sh} u = \mathrm{i} \sin \mathrm{i}u$, což po násobení $-\mathrm{i}$ dá první vzorec. Druhé dva vzorce se odvodí ještě snáz, protože tam pořád nepovlává to i. Nakonec dělením prvního a třetího vztahu dostaneme $\operatorname{tg} \mathrm{i}x = \mathrm{i} \operatorname{th} x$, a dělením druhého a čtvrtého $\operatorname{th} \mathrm{i}x = \mathrm{i} \operatorname{tg} x$.

9 Díky vztahům z minulé úlohy můžete snadno přepsat už známé vzorce pro goniometrické funkce na jejich „hyperbolické“ verse:
1. Platí $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$; čemu se rovná $\operatorname{sh}(a + b)$? **2.** Platí $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; čemu se rovná $\operatorname{ch}^2 x$? **3.** Platí $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; čemu se rovná $\operatorname{th} 2x$?

Řešení. V prvním bodě dosadíme $a = \mathrm{i}u$, $b = \mathrm{i}v$ a uplatníme poučky z předchozího bodu. Podle nich se to upraví na $\mathrm{i} \operatorname{sh}(u+v) = \mathrm{i} \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \cdot \mathrm{i} \operatorname{sh} v$. Po zkrácení i dostaneme $\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$. Podobně v druhém bodě dostaneme $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1+\operatorname{ch} 2x}{2}$ a ve třetím $\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1+\operatorname{th}^2 x}$.

Tady může být užitečné řešit všechny úlohy „zároveň“: první obsahuje hromadu zlomků na rozložení, ostatní nabízejí finty, jak se s rozkládáním snáz vyrovnat. Nemusíte se je učit, pokud nechcete, ale dovedou řádně ušetřit čas.

10 Rozložte v parciální zlomky:
1. $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$; **2.** $\frac{x+1}{(x^2-4)(x+3)}$; **3.** $\frac{x^2}{(x+2)^2(x-3)}$; **4.** $\frac{1}{(x^2-9)^2}$; **5.** $\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$; **6.** $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$; **7.** $\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$; **8.** $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$; **9.** $\frac{1}{x^3+1}$; **10.** $\frac{1}{x^4+1}$.
(**Nápověda:** $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$; $x^4+1 = \underbrace{x^4+1+2x^2}_{(x^2+1)^2} - 2x^2$; zkuste vztah pro rozdíl čtverců.)

Řešení. Ad 1. Napíšeme $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \frac{(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}\right]$.

Ad 2. Ve jmenovateli je $(x-2)(x+2)(x+3)$. To má jednoduché kořeny, takže lze použít úlohu 12, podle níž můžeme výsledek prakticky hned napsat: $\frac{3/20}{x-2} + \frac{1/4}{x+2} - \frac{2/5}{x+3}$.

Ad 3. Koeficienty u $1/(x+2)^2$ a $1/(x-3)$ můžeme zjistit ihned pomocí postupu podle úlohy 12 (ten koeficient u $1/(x+2)^2$ najdeme tak, že vynásobíme celou rovnost $(x+2)^2$ a pošleme $x \to -2$). Tím dostaneme $\frac{9/25}{x-3} - \frac{4/5}{(x+2)^2}$. Ale to ještě není všechno. Teď tento výraz odečteme od toho původního zlomku a tím dostaneme ten poslední člen, který nám ještě chybí (ten má ve jmenovateli $x+2$ na prvou). Ten je roven $\frac{16/25}{x+2}$, takže celkem máme rozklad $\frac{16/25}{x+2} - \frac{4/5}{(x+2)^2} + \frac{9/25}{x-3}$.

Ad 4. Vyjdeme z toho, že $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right)$ a umocníme tento rozklad na druhou. Tím obdržíme $\frac{1}{36}\left(\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{(x+3)^2}\right)$, přičemž na zlomek uprostřed můžeme znova použít ten stejný rozklad a dostaneme výsledek $\frac{1/108}{x+3} - \frac{1/108}{x-3} + \frac{1/36}{(x-3)^2} - \frac{1/36}{(x+3)^2}$.

Ad 5. Tady jsou sice ve jmenovateli nerozložitelné trojčleny, ale to je celkem jedno. Nic nám totiž nebrání napsat v čitateli $1 = \frac{(x^2+9)-(x^2+4)}{5}$, čímž se hned dostaneme k výsledku $\frac{1/5}{x^2+4} - \frac{1/5}{x^2+9}$.

Ad 6. Pro zjednodušení dalších dvou cvičení tohle ještě trochu zkomplikujeme a rozložíme raději obecnější zlomek $\frac{1}{(x-a)(x^2+x+b)}$, který se pro hodnoty $a = 1$, $b = 1$ redukuje na ten náš původní. Teď zkusíme vyjádřit jedničku: vezmeme $x^2 + x + b$ a odečteme od toho nějaký násobek $x - a$ tak, aby se $x^2 + x$ odečetlo. Jestliže chci, aby $(x - a)(x + \text{něco})$ začínalo na $x^2 + x + \cdots$, musím položit $\text{něco} = a + 1$. Po tomto poznání už snadno dostaneme $1 = \frac{1}{a^2+a+b}\left(x^2 + x + b - (x - a)(x + a + 1)\right)$, což po vložení do zlomku dá rozklad

$$\frac{1}{(x-a)(x^2+x+b)} = \frac{1}{a^2+a+b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{x+a+1}{x^2+x+b}\right) \tag{$\star$}$$

(dal jsem to takhle pěkně na prostředek, aby to bylo vidět i z dalších bodů). Po položení $a = b = 1$ se to redukuje na výsledek $\frac{1/3}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1}$.

Ad 7. Zderivujeme rozklad ($\star$) z minulého bodu podle a. Tím dostaneme

$$\frac{1}{(x-a)^2(x^2+x+b)} = -\frac{2a+1}{(a^2+a+b)^2}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{x+a+1}{x^2+x+b}\right) + \frac{1}{a^2+a+b}\left(\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{x^2+x+b}\right).$$

Po dosazení $a = b = 1$ máme hned žádaný rozklad $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\right)$.

Ad 8. Zase zderivujeme rozklad ($\star$), ale tentokrát podle b. Tím dostaneme

$$-\frac{1}{(x-a)(x^2+x+b)^2} = -\frac{1}{(a^2+a+b)^2}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{x+a+1}{x^2+x+b}\right) + \frac{1}{a^2+a+b}\cdot\frac{x+a+1}{(x^2+x+b)^2}.$$

Nezapomeneme zrušit mínus, opět položíme $a = b = 1$ a máme hnedle výsledek $\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

Ad 9. Zařídíme se podle nápovědy, napíšeme $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, pak přepíšeme jedničku podobně jako v šestém bodě. Zde utvoříme kombinaci $(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x - 2) = 3$, takže máme $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^2-x+1)-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$.

Ad 10. Tady nás to konečně doběhne; budeme se muset vzdát triků a udělat to pořádně. Podle nápovědy napíšeme $x^4+1 = x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$. Výsledek tedy bude mít tvar $\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$, kde A, B, C, D zatím neznáme. Nalezneme je tak, že dáme tenhleten součet na společný jmenovatel a porovnáme s původním zlomkem. V čitateli toho našeho součtu bude $(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1) = (A+C)x^3+[\sqrt{2}(A-C)+B+D]x^2 + [\sqrt{2}(B-D) + A + C]x + (B + D)$. To se má rovnat jedné, takže všechny závorky až na tu poslední musí být nulové. Z toho hned máme $A + C = 0$ a $B + D = 1$, což dosazeno do zbylých dvou rovnic dá $\sqrt{2}(A - C) + 1 = 0$ a $\sqrt{2}(B - D) = 0$. Řešení už na sebe nenechá dlouho čekat: $A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = D = \frac{1}{2}$, takže konečně máme

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{\frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

II U jednoduchých zlomků se vyplatí zkusit od oka zapsat čitatel jako kombinaci závorek ve jmenovateli. Třeba při rozkládání zlomku $\frac{1}{x(x-4)}$ se hodí napsat $1 = [x - (x - 4)]/4$. Nahraďte tím čitatel a dokončete rozklad. Jestli chcete, zkoušejte pak podobné triky vymyslet i u složitějších zlomků.

Řešení. Uděláme to, dostaneme $\frac{1}{x(x-4)} = \frac{1}{4}\frac{x-(x-4)}{x(x-4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right)$. Pro použití na složitější zlomky viz např. bod 6 v úloze 10.

12 Pokud má jmenovatel *pouze jednoduché* kořeny, musí platit

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

kde A_k jsou zatím neznámé koeficienty, které chceme najít. Násobte obě strany $x-a_k$ a v limitě pošlete $x \to a_k$. Jaký vztah pak dostanete pro koeficient A_k?

Řešení. Všechny sčítance napravo vypadnou, až na ten, který obsahuje A_k. U něj je zase $x-a_k$ ve jmenovateli, ale my jsme to tímtéž vynásobili, takže zůstane prostě A_k.

Vlevo pak máme $\lim_{x\to a_k} \frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\cdots(x-a_n)}$, tedy ze jmenovatele zmizne právě ta závorka $x-a_k$ a ostatní tam zůstanou. Proto dostaneme

$$A_k = \frac{P(a_k)}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)\cdots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\cdots(a_k-a_n)}.$$

Pokud máme ve jmenovateli místo součinu závorek roznásobený polynom $Q(x)$, je dobře si uvědomit, že $A_k = \lim_{x\to a_k} \frac{P(x)(x-a_k)}{Q(x)}$. Ovšem protože a_k je kořenem $Q(x)$, můžeme ve jmenovateli klidně psát $Q(x) = Q(x) - 0 = Q(x) - Q(a_k)$ a použít toho, že $\lim_{x\to a_k} \frac{Q(x)-Q(a_k)}{x-a_k} = Q'(a_k)$. Proto lze také psát pro takový případ

$$A_k = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)}.$$

13 Pokud je ve jmenovateli nerozložitelný trojčlen, metoda výše nebude fungovat. Zkuste najít nějaký způsob, jak ji spravit. (Jeden fajn způsob funguje jen v případě, že je tam ten trojčlen jen jeden.)

Řešení. Jeden jednoduchý může spočívat v tom, že najdeme všechny ostatní zlomky kromě toho s tím trojčlenem a všechny je odečteme od toho, co rozkládáme. To, co nám zůstane, je nutně ten poslední příspěvek, který jsme hledali.

Jiná možnost spočívá v tom, že si uvědomíme, že nerozložitelný trojčlen má dva rozličné komplexně sdružené kořeny. Pak se k tomu můžeme chovat jako k dvěma jednoduchým kořenům a je po problému.

14 S násobnými kořeny je vždycky problém. Dobrý způsob, jak se jich zbavit, může být pomocí derivování. Řekněme např., že chceme rozložit $\frac{1}{(x-2)^2(x+1)}$. Udělejte to tak, že nejdřív rozložíte $\frac{1}{(x-a)(x+1)}$ (bez druhé mocniny). Obě strany rozkladu derivujte podle a a pak položte $a=2$. Co vyjde? Zkuste tuhle metodu uplatnit i v příkladě 10.

Řešení. Rozložíme $\frac{1}{(x-a)(x+1)} = \frac{1}{a+1}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+1}\right)$. Derivováním podle a dostaneme

$$\frac{1}{(x-a)^2(x+1)} = -\frac{1}{(a+1)^2}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{a+1}\frac{1}{(x-a)^2},$$

což po dosazení $a=2$ dá výsledný rozvoj $\frac{1}{(x-2)^2(x+1)} = -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1/3}{(x-2)^2}$.

Bla bla bla.