1 Dokažte „hyperbolickou jedničku“ $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

2 Kružnici o poloměru R lze zadat rovnicí $x^2 + y^2 = R^2$, díky čemuž ji můžeme parametrisovat například takto: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$; to funguje díky vztahu $\sin^2 + \cos^2 = 1$.
Podobným způsobem využijte vztah $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ k parametrisaci hyperboly $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Tím by mělo být vysvětleno, proč se těmto funkcím říká hyperbolické.

3 Vypočtěte derivace funkcí $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ a $\operatorname{th} x$ a vyjádřete je pomocí hyperbolických funkcí.

4 Vyšetřete průběh funkcí $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ a $\operatorname{th} x$ a načrtněte jejich grafy (vyjděte z definice pomocí exponenciál).

5 Řešte rovnici $u = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Tím zjistíte, jak se dá spočítat x ze zadané hodnoty $u = \operatorname{sh} x$. Zapište explicitní vztah pro inversní funkci k $\operatorname{sh} x$, která se označuje (mezi jinými) $\operatorname{ar\,sh} x$. Stejně vyjádřete i $\operatorname{ar\,ch} x$ a $\operatorname{ar\,th} x$.

6 Derivujte vztah $\operatorname{ar\,sh}(\operatorname{sh} x) = 1$ a položením $\operatorname{sh} x = y$ vyjádřete derivaci $\operatorname{ar\,sh} y$. Stejným způsobem nalezněte derivace $\operatorname{ar\,ch} x$ a $\operatorname{ar\,th} x$.

7 Pokud jste vyřešili všechny předchozí úlohy, dejte plyšáka na stůl!

8 Ukažte, že platí následující vztahy mezi hyperbolickými a goniometrickými funkcemi:
1. $\sin ix = i \operatorname{sh} x$; **2.** $\operatorname{sh} ix = i \sin x$; **3.** $\cos ix = \operatorname{ch} x$; **4.** $\operatorname{ch} ix = \cos x$; **5.** Napište obdobné vztahy pro funkce $\operatorname{th} x$ a $\operatorname{tg} x$.

9 Díky vztahům z minulé úlohy můžete snadno přepsat už známé vzorce pro goniometrické funkce na jejich „hyperbolické“ verse:
1. Platí $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$; čemu se rovná $\operatorname{sh}(a+b)$? **2.** Platí $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; čemu se rovná $\operatorname{ch}^2 x$? **3.** Platí $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; čemu se rovná $\operatorname{th} 2x$?

Tady může být užitečné řešit všechny úlohy „zároveň“: první obsahuje hromadu zlomků na rozložení, ostatní nabízejí finty, jak se s rozkládáním snáz vyrovnat. Nemusíte se je učit, pokud nechcete, ale dovedou řádně ušetřit čas.

10 Rozložte v parciální zlomky. **Jakmile zvládnete 7 rozkladů, položte plyšáka na stůl.**

1. $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$; **2.** $\frac{x+1}{(x^2-4)(x+3)}$; **3.** $\frac{x^2}{(x+2)^2(x-3)}$; **4.** $\frac{1}{(x^2-9)^2}$; **5.** $\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$;
6. $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$; **7.** $\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$; **8.** $\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$; **9.** $\frac{1}{x^3+1}$; **10.** $\frac{1}{x^4+1}$.
(**Nápověda:** $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$; $x^4+1 = \underbrace{x^4+1+2x^2}_{(x^2+1)^2} - 2x^2$; zkuste vztah pro rozdíl čtverců.)

11 U jednoduchých zlomků se vyplatí zkusit od oka zapsat čitatel jako kombinaci závorek ve jmenovateli. Třeba při rozkládání zlomku $\frac{1}{x(x-4)}$ se hodí napsat $1 = [x - (x-4)]/4$. Nahraďte tím čitatel a dokončete rozklad. Jestli chcete, zkoušejte pak podobné triky vymyslet i u složitějších zlomků.

12 Pokud má jmenovatel *pouze jednoduché* kořeny, musí platit

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

kde A_k jsou zatím neznámé koeficienty, které chceme najít. Násobte obě strany $x - a_k$ a v limitě pošlete $x \to a_k$. Jaký vztah pak dostanete pro koeficient A_k?

13 Pokud je ve jmenovateli nerozložitelný trojčlen, metoda výše nebude fungovat. Zkuste najít nějaký způsob, jak ji spravit. (Jeden fajn způsob funguje jen v případě, že je tam ten trojčlen jen jeden.)

14 S násobnými kořeny je vždycky problém. Dobrý způsob, jak se jich zbavit, může být pomocí derivování. Řekněme např., že chceme rozložit $\frac{1}{(x-2)^2(x+1)}$. Udělejte to tak, že nejdřív rozložíte $\frac{1}{(x-a)(x+1)}$ (bez druhé mocniny). Obě strany rozkladu derivujte podle a a pak položte $a = 2$. Co vyjde? Zkuste tuhle metodu uplatnit i v příkladě 10.

15 Vypočtěte $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ a $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ (podívejte se, co Vám vyšlo v úloze 6, a vyjděte z toho).

16 Vypočtěte následující integrály tak, že integrand rozbijete na součet funkcí, které už umíte integrovat. **Jakmile jich spočtete 5, položte plyšáka na stůl.**

1. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; **2.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$; **3.** $\int (1+\sin x+\cos x)\, dx$; **4.** $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$;

5. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$; **6.** $\int \frac{x+1}{(x^2-4)(x+3)} dx$; **7.** $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx$; **8.** $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

Nápověda: U čísla 8 využijte toho, že $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. U čísel 5 a 6 se podívejte na to, co jste spočítali při rozkladech v parciální zlomky v úloze 10.

17 Vypočtěte následující integrály užitím jednoduchých substitucí:

1. $\int \frac{dx}{x+a}$; **2.** $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$; **3.** $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$; **4.** ty dva příklady, které jste dostali od jiné skupinky.

18 Integrujte per partes:

1. $\int x \sin x\, dx$; **2.** $\int x^2 \mathbf{e}^{-x} dx$; **3.** $\int \ln x\, dx$; **4.** $\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$; **5.** $\int \mathbf{e}^x \sin x\, dx$.

Pozor! V pátém bodě integrujete $\mathbf{e}^x \sin x$. Po každém per partes se podívejte, jestli náhodou ten integrál, který z per partes vyšel, není taky z $\mathbf{e}^x \sin x$, jinak se zacyklíte navěky.