1 Ukažte, že *lineární substituce* v integrálech funguje takto:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

přičemž a, b jsou konstanty a $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

2 Vypočtěte integrály s pomocí lineární substituce (a je konstanta):

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a}$; **2.** $\displaystyle\int (2x-3)^{10}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-5x}}$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$; **5.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-bx^2}}$ $(a > b > 0)$;

3 Ukažte, že pro libovolnou (dost slušnou) funkci f platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|.$$

4 Použijte poznatek předchozí úlohy na vypočtění těchto integrálů:

1. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-4}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+7}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+2}$.

5 Pomocí substitucí vypočtěte integrály:

1. Pět příkladů od jiné skupinky. **2.** $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$;

5. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}$; **6.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

6 Protože už umíme rozklady v parciální zlomky a jednoduché substituce, můžeme (v principu) integrovat jakoukoli racionální lomenou funkci prostě tak, že integrand rozložíme v parciální zlomky. Každý ten zlomek se pak už integruje celkem snadno (aspoň většinou...) Zkuste si to:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x+7)}$; **2.** $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2-4)(x+3)}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-9)^2}$; **4.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+9)}$;

5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x+1)}$; **6.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$; **7.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

P. S.: Jde vesměs o zlomky, které jste rozkládali minule, takže stojí za to se kouknout, které z nich jste už udělali. Ale na řešení v ISu se prosím nedívejte ⌣̈.

7 Integrujte per partes:

1. $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int x\operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x$; **5.** $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Pozor! V pátém bodě integrujete $\mathrm{e}^x\sin x$. Po každém per partes se podívejte, jestli náhodou ten integrál, který z per partes vyšel, není taky z $\mathrm{e}^x\sin x$, jinak se zacyklíte navěky.

8 Pomocí integrace per partes dokažte následující vztahy ($n \geq 2$ je přirozené číslo):

1. $\displaystyle\int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x$;

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{n-2} x}$.

9 **Pokud zbude čas:** Někdy se při rozkladu v parciální zlomky objeví zlomek, který má ve jmenovateli druhou (nebo i vyšší) mocninu nerozložitelného trojčlenu. To je jediný případ, který se integruje nepříjemně. Na přednášce je na to magická rekurence, ale můžete zkusit i něco jiného. Nejdřív vypočtěte integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} \quad (a, b, c \text{ jsou konstanty, } 4ac \geq b^2)$$

a pak ho několikrát derivujte podle c. Co se stane?

10 Pepíček se snažil integrovat, ale moc mu to nejde. V každém z výpočtů, které následují níže, se dopustil nějaké chyby. Vaším úkolem je **najít v každém výpočtu chybu** a poté, co ji najdete, **spočítat integrál správně**.

1.
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left|\left|u = x^2\right|\right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln|1+u| = \ln|1+x^2| + C.$$

2.
$$\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x = \left(\int x^2 \,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int \cos x \,\mathrm{d}x\right) = \frac{x^3}{3} \cdot \sin x + C.$$

3.
$$\int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x = \left|\left| \begin{array}{ll} u & = 1/x \\ \mathrm{d}u & = \ln x \,\mathrm{d}x \end{array} \right|\right| = \int u \,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2x^2} + C.$$

4.
$$\int \frac{x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\left| \begin{array}{ll} f = x & f' = 1 \\ g' = 1 - x^2 & g = x - \frac{x^3}{3} \end{array} \right|\right| = x^2 - \frac{x^4}{3} - \int \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C.$$

5.
$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \left|\left| \begin{array}{ll} f = \cos x & f' = \sin x \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{array} \right|\right| = \sin x \cos x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \sin x \cos x - \int \mathrm{d}x + \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x,$$

takže $I = \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ musí splňovat rovnici $I = \sin x \cos x - x + I$, a ta nemá řešení… takže $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ vůbec neexistuje???

6.
$$\int x^2 \arcsin x \,\mathrm{d}x = \left|\left| \begin{array}{ll} f = \arcsin x & f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g' = x^2 & g = x^3/3 \end{array} \right|\right| = \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 \,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \left|\left| \begin{array}{ll} f = x^3 & f' = \cdots \\ g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & g = \cdots \end{array} \right|\right| \cdots$$

7.
$$\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \left|\left| \begin{array}{ll} f = \cos x & f' = -\sin x \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{array} \right|\right| = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \left|\left| \begin{array}{ll} f = \sin x & f' = \cos x \\ g' = \sin x & g = -\cos x \end{array} \right|\right| = \sin x \cos x - \sin x \cos x + \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x =$$
$$= \left|\left| \begin{array}{ll} f = \cos x & f' = -\sin x \\ g' = \cos x & g = \sin x \end{array} \right|\right| = \sin x \cos x - \sin x \cos x + \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \cdots$$

… a jestli Pepíček neumřel, tak tak počítá dodnes.

POZOR!!!
VŠECHNY TYHLE VÝPOČTY JSOU BLBĚ! FAKT!!