Řešení první písemky

První úloha

1 Zapište číslo $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (kde $-\pi < \varphi < \pi$) v polárním tvaru (tj. jako nějaké $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$). [½ **bodu**]

Vytkneme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}$, takže dostaneme

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}) = 2\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2},$$

kde poslední úprava vyplývá z Eulerova vzorce $\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}$ (viz úloha 18 v třetím cvičení). Při $-\pi < \varphi < \pi$ je $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$, takže nemusíme řešit posun argumentu o π, který by nastal, kdyby toto číslo bylo záporné.

Druhá úloha

2 Vyjádřete $\cos 3x$ pouze pomocí $\cos x$. [½ **bodu**]

Jelikož máme $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3$, musí platit

$$\cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3 = \cos^3 x + 3\mathrm{i}\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - \mathrm{i}\sin^3 x.$$

Vzavše reálnou část, obdržíme výsledek

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Třetí úloha

3 Zjednodušte výraz $a^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$. [½ **bodu**]

Tady byl bohužel v zadání překlep — místo toho mělo být $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$. Proto jsem uznával jakoukoli validní úpravu, kterou jste udělali.

Čtvrtá úloha

4 Dvě železnice ve tvaru úsečky se křižují pod pravým úhlem. Na obou železnicích vyjedou ve stejné chvíli z konečných stanic vlaky stálou rychlostí v směrem k průsečíku. Kdy k sobě budou oba vlaky nejblíž a jaká bude tato minimální vzdálenost, jestliže první vlak začíná ve vzdálenosti a od průsečíku, zatímco druhý začíná ve vzdálenosti b? (**Nápověda:** zkuste doplnit na čtverec v proměnné t (tj. v čase).) [1 **bod**]

V čase t bude první vlak ve vzdálenosti $a - vt$ od průsečíku a druhý $b - vt$. Jelikož jsou železnice na sebe kolmé, je vzdálenost dána Pythagorovou větou:

$$d^2 = (a-vt)^2 + (b-vt)^2 = 2(vt)^2 - 2vt(a+b) + a^2 + b^2.$$

Doplníme na čtverec v součinu vt:

$$d^2 = 2\left[\left(vt - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4}\right].$$

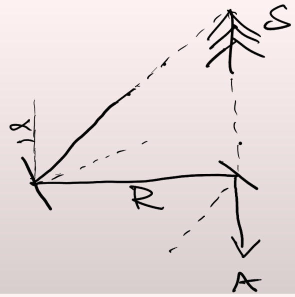
Poslední dva zlomky dáme na společného jmenovatele a roznásobíme $(a + b)^2$, čímž nakonec dostaneme

$$d^2 = 2\left(vt - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(a-b)^2}{2}.$$

Minimum je tedy $d^2 = \frac{(a-b)^2}{2}$, neboli $d = \frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$. Toto minimum nastane v okamžiku, kdy se závorka vynuluje, tj. když platí $t = \frac{a+b}{2v}$.

Pátá úloha

5 Na stůl o straně R připevníme dvě zrcátka tak, jak je to znázorněno na obrázku. Díváme se z bodu A na vzdálený strom S, přičemž stůl nám část stromu zakrývá. Nato otáčíme levým zrcátkem tak dlouho, dokud obraz v pravém zrcátku nebude přesně navazovat na vršek stromu, který vidíme přes něj. Jak můžete z natočení zrcátka (na obrázku α) zjistit, jak je strom daleko? [1 **bod**]



Středy obou zrcátek a strom tvoří pravoúhlý trojúhelník, ve kterém známe jednu odvěsnu R a chceme dopočíst tu druhou. Vše se tedy redukuje na zjištění úhlu mezi příchozím a odchozím paprskem na levém zrcátku.

Tečkovaná čára u tohoto zrcátka vyznačuje směr kolmice k zrcátku. Podle zákona odrazu, který byste měli znát z elementární fysiky, je úhel dopadu (tedy úhel mezi příchozím paprskem a kolmicí) roven úhlu odrazu (tedy úhlu mezi kolmicí a odchozím paprskem). Zároveň snadno dopočteme, že mezi kolmicí a odchozím paprskem je úhel α, tedy mezi příchozím a odchozím je dvakrát tolik. Pak už snadno zjistíme vzdálenost, která je rovna $R \operatorname{tg} 2\alpha$.

Šestá úloha

6 Ukažte, že každou funkci $f(x)$, která je definována pro všechna reálná x, lze zapsat jako součet sudé a liché funkce. [1 **bod**]

Jestliže to jde, pak musí jít zapsat $f(x) = g(x) + h(x)$, kde g je sudá a h lichá. Proto máme

$$f(x) = g(x) + h(x),$$
$$f(-x) = g(x) - h(x).$$

Sečtením a odečtením těchto dvou rovností dostáváme recepis na konstrukci těchto dvou funkcí:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Tohle byl ovšem důkaz tak trochu „pozpátku“ — předpokládali jsme, že to, co jsme měli dokázat, už platí! Dostali jsme ale výrazy pro funkce g, h, a ty vyhovují všem požadavkům úlohy: g je skutečně sudá, h je skutečně lichá a jejich součet je skutečně f. Protože jsme skutečně každou funkci zapsali jako součet sudé a liché, je přece jenom důkaz zdárně dokončen.

Sedmá úloha

$\boxed{7}$ Nalezněte všechny funkce $f(x)$, které jsou definovány pro všechna reálná x a které jsou sudé i liché zároveň. [1 **bod**]

Je-li funkce f sudá, musí platit $f(-x) = f(x)$. Naopak je-li lichá, musí platit $f(-x) = -f(x)$. Proto máme $f(x) = -f(x)$, čili $f(x) = 0$.