3. cvičení z M1110, podzim 2021

Před počítáním úloh zopakujte počítání s komplexními čísly (sčítání, násobení, komplexně sdružené číslo, absolutní hodnota, převrácené číslo k danému číslu.) Bylo by dobré udělat aspoň úlohy 1 až 4.

Příklad. 1. Ukažte, že množina

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

společně s operacemi

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2), \quad a \odot (x_1, x_2) = (x_1^a, x_2^a)$$

tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklad. 2. Ukažte, že následující množiny lze opatřit vhodnou operací sčítání a násobení skalárem tak, aby se s těmito operacemi staly vektorovými prostory nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

(a) Množina $\mathbb{R}[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty.
(b) Množina $\mathbb{C}[x]$ všech polynomů s komplexními koeficienty.
(c) Množina $\mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{R})$ matic tvaru $k \times n$ s reálnými čísly.
(d) Množina $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ všech posloupností reálných čísel.
(e) Množina $\{f : M \to \mathbb{C}\}$ všech zobrazení nějaké neprázdné množiny M do komplexních čísel.

Příklad. 3. Ukažte, že množina $U = \mathbb{R}^3$ s operacemi

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \quad a \odot (x_2, x_2, x_3) = (ax_1, x_2, x_3)$$

není vektorový prostor. Zjistěte, které axiomy vektorového prostoru jsou splněny a které nikoliv.

Příklad. 4. Rozhodněte, zda následující podmnožiny vektorových prostorů s operacemi stejnými jako na vektorovém prostoru jsou rovněž vektorové prostory.

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}[x] |\ f(3) = 0,\ f(-1) = 0\} \subset \mathbb{R}[x]$,
(b) $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) |\ a_{11} + a_{22} = 1\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
(c) $W = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) |\ \det A = 0\} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$,
(d) $Z = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} |\ f(n+1) = f(n) + f(n-1)\} \subset \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$.

Příklad. 5. Rozhodněte, zda následující podmnožiny vektorového podprostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ jsou vektorové podprostory.

(a) $U = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} |\ \forall x \in \mathbb{R} :\ f(|x|) = 0\}$,
(b) $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} |\ \forall c \in \mathbb{Z} :\ f(c) \cdot f(-c) = 0\}$,
(c) $W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} |\ \forall s, t \in \mathbb{R} :\ s \le t \Rightarrow f(s) \ge f(t)\}$,
(d) $X = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} |\ \exists n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R} :\ |f(x)| \le n|x|\}$.