8. cvičení z M1110, podzim 2020

Příklad. 1. Rozhodněte, zda následující zobrazení mezi vektorovými prostory jsou lineární.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x_1, x_2) = 2x_1 + x_1x_2,$

(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 5x_2, x_1 - x_2),$

(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2)^2),$

(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(p) = (p(1), p(2)).$

$\varphi : U \to V$ je lineární

(1) $\forall u_1, u_2 \in U \quad \varphi(u_1+u_2) = \varphi(u_1)+\varphi(u_2)$

(2) $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall u \in U \quad \varphi(au) = a\varphi(u)$

(a) $(1,2), (2,3) \in \mathbb{R}^2$

$(1,2)+(2,3) = (3,5)$

$\varphi(3,5) = 6+3\cdot 5 = 21 \neq \varphi(1,2)+\varphi(1,3) = 4+10 = 14$

$\varphi(1,2) = 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 4$ podmínka (1) není splněna

$\varphi(2,3) = 2\cdot 2 + 2\cdot 3 = 10$ zobrazení není lineární

Ani podmínka (2) není splněna.

(b) $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 5x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Takové zobrazení je lineární.

(c) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(p) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2)^2 \end{pmatrix}$

Ukážeme, že podmínka 2 není splněna.

$p(x) = x^2+1 \quad \varphi(p) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \end{pmatrix}$

$2p(x) = 2x^2+2 \quad \varphi(2p) = \begin{pmatrix} 4 \\ 10^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 100 \end{pmatrix}$

$\varphi(2p) = \begin{pmatrix} 4 \\ 100 \end{pmatrix} \neq 2\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 25 \end{pmatrix} = 2\varphi(p)$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 50 \end{pmatrix}$

nejde o lin. zobrazení

(d) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(p) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$

Je lineární.

$p, q \in \mathbb{R}_3[x]$

$$\varphi(p+q) = \begin{pmatrix} (p+q)(1) \\ (p+q)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1)+q(1) \\ p(2)+q(2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(1) \\ q(2) \end{pmatrix} = \varphi(p) + \varphi(q)$$

Analogicky $\varphi(ap) = a\varphi(p)$.

Příklad. 2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme bázi $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, o němž víme, že

$$\varphi(u_1) = u_1,\ \varphi(u_2) = u_3,\ \varphi(u_3) = u_2.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 tak, aby v souřadnicích standardní báze bylo $\varphi(x) = Ax$.

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \varphi(x) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$A\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}$ = 1. sloupec matice A

$A\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}$ = 2. sloupec matice A

$A\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_3}$ = 3. sloupec matice A

Určit matici A znamená spočítat $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$.

$$e_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$
$$\varphi(e_1) = a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + a_3 \varphi(u_3)$$

Algoritmus

$$\left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ \hline u_1 & \varphi(u_1) = u_1 \\ u_2 & \varphi(u_2) = u_3 \\ u_3 & \varphi(u_3) = u_2 \end{array}\right) \quad \begin{matrix}\text{elem.} \\ \text{řádk.} \\ \sim \\ \text{operace}\end{matrix} \quad \left(\begin{array}{c|c} u_1 & \varphi(u_1) \\ u_1 + u_2 & \underbrace{\varphi(u_1) + \varphi(u_2)}_{= \varphi(u_1 + u_2)} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|c} v & \varphi(v) \end{array}\right)$$

Budeme počítat, abychom dostali

$$\left(\begin{array}{c|c} e_1 & \varphi(e_1) \\ e_2 & \varphi(e_2) \\ e_3 & \varphi(e_3) \end{array}\right) \longrightarrow \text{sloupce matice A}$$

$$u \quad \mid \quad \varphi(u)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(e_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Zkouška $\quad \varphi(u_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2$

Příklad. 3. Nechť φ je zobrazení $\mathbb{R}^3$ do sebe, které je symetrií podle roviny $x_1 - x_3 = 0$. Najděte matici B takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Bx$.

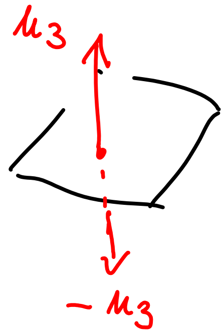
$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ symetrie podle roviny $x_1 - x_3 = 0$.

Rovina prochází bodem $[0,0,0]$, jde o lin. zobrazení. Stačí najít obrazy 3 vektorů nějaké báze v $\mathbb{R}^3$.

Vezměme u_1, u_2 v rovině $x_1 - x_3 = 0$.

u_3 vektor $\perp$ na tuto rovinu.

$$u_1 = (1,0,1)$$
$$u_2 = (0,1,0)$$
$$u_3 = (1,0,-1) \qquad u_3 \perp u_1 \qquad u_3 \perp u_2$$
$$\varphi(u_1) = u_1, \qquad \varphi(u_2) = u_2$$
$$\varphi(u_3) = -u_3$$



$$\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hledaná matice B je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zkouška:

$$B u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad. 4. Najděte bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadaného předpisem

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{pmatrix}.$$

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \overset{C}{\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Báze $\ker \varphi = \{x \in \mathbb{R}^4, \ \varphi(x) = \vec{0} \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^4, \ Cx = 0\}$

Musíme najít bázi řešení hom. soustavy.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = a \qquad x_4 = b$

$x_2 = -x_3 - 2x_4 = -a - 2b$

$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 2a + 4b - 3a - 5b$

$= -a - b$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-a-b, -a-2b, a, b) =$

$= a(-1, -1, 1, 0) + b(-1, -2, 0, 1)$

Báze $\ker \varphi$ je dána vektory $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Báze $\operatorname{im} \varphi = \{y \in \mathbb{R}^3, \ \exists x \in \mathbb{R}^4 \ \varphi(x) = y\}$

$\varphi(x) = Cx \qquad \varphi(e_1) =$ 1. sloupec matice C

$\varphi(e_2) =$ 2. sloupec matice C

$$u = \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot e_i \qquad \varphi(u) = \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot \varphi(e_i)$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} \varphi &= [\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)] \\
&= [s_1(C), s_2(C), s_3(C), s_4(C)] \\
&= \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

Z nich vybereme lin. nezávislé se stejným lin. obalem

stejné jako výše

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_1)\ \varphi(e_2) \qquad\qquad \end{array} \underset{\sim}{\text{řádk. úpravy}} \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ 0 & 1 & \circ & \circ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektory $\varphi(e_1)$ a $\varphi(e_2)$ jsou LN,

$$[\varphi(e_1), \varphi(e_2)] = [\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)] = \operatorname{im} \varphi$$

$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ je báze $\operatorname{im} \varphi$.

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4}_{4} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}} \ker \varphi}_{2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} \varphi}_{2}$$

✓

Příklad. 5. Najděte nějaké lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takové, že

$$\ker f = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right] \quad \text{a} \quad \operatorname{im} f = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right].$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s předepsaným jádrem a obrazem

$$\ker f = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right] \qquad \operatorname{im} f = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \{ y \in \mathbb{R}^3, \exists x \in \mathbb{R}^3 \; y = f(x) \}$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$$

$$3 = 2 + 1 \quad \checkmark$$

f není určena jednoznačně, je jich „spousta"

Jak najít jedno?

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{báze } \mathbb{R}^3$$

$$f(u_1) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad f(u_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad f(u_3) = a \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

f takto definované má

$$u_1, u_2 \in \ker f, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{im} f$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$$

$$3 = \dim [u_1, u_2] \quad \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right]$$

Chceme zápis f pomocí matice:

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & f(u) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Zkouška: přesvědčíme se o tom, že $u_1, u_2 \in \ker f$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 6. Nechť je lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadáno svými hodnotami na vektorech báze prostoru $\mathbb{R}^4$.

$$\varphi(1,2,2,2) = (1,-5,4),\ \varphi(0,1,2,2) = (1,2,-3),\ \varphi(0,0,1,2) = (2,-3,1),$$
$$\varphi(0,0,0,1) = (-3,1,2).$$

Najděte bázi jeho jádra a obrazu.

2 možné postupy:

(1) Najdeme matici A takovou, že

Najdeme jako v úlohách 2 a 3.

$$\varphi(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

A je matice 3×4

$\ker \varphi$ ... řešíme $Ax = 0$

$\mathrm{im}\, \varphi = [$sloupce matice $A]$

Viz úloha 4

(2) <u>Jiný postup</u>

$$\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

upravujeme pomocí el. řádk. operací $\sim \left(\begin{array}{c|c} & \text{schod. tvar} \end{array}\right)$

$$= \left(\begin{array}{c|cccc} u_1 & \bullet & \circ & \circ & \circ \\ u_2 & 0 & \bullet & \circ & \circ \\ \boxed{u_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{u_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

v_1, v_2

budou lin. nezávislé

$\varphi(u_3) = \vec{0}$

$\varphi(u_4) = \vec{0}$

Báze $\ker \varphi$ je u_3, u_4.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(u_1) = v_1 \\ \varphi(u_2) = v_2 \end{array}\right\} \text{jsou LN}$$

$v_1, v_2 \in \mathrm{im}\, \varphi$

Báze $\mathrm{im}\, \varphi$ je v_1, v_2.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \\ -2 & -4 & -3 & -2 & 0 & 7 & -7 \\ 3 & 6 & 6 & 7 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ u_1 \\ u_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 & -7 \\ -1 & -3 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

v_1, v_2 báze im φ

u_1, u_2 báze ker φ

$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker + \dim \operatorname{im} \varphi$

$4 = 2 + 2$

Báze ker φ je $(-1, -3, -3, -2)$ a $(1, 4, 6, 7)$

Báze im φ je $(1, -5, 4)$ a $(0, 1, -1)$.

Příklad. 7. Napište konkrétní předpis lineárního zobrazení $F : \mathbb{R}_{100}[x] \to \mathbb{R}^{50}$ takového, že $\dim \ker F = 70$. ✓

$p \in \mathbb{R}_{100}[x]$ $\qquad \dim \mathbb{R}_{100}[x] = 101$

$1, x, x^2, \dots x^{100}$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{100} x^{100}$

$F : \mathbb{R}_{100}[x] \to \mathbb{R}^{50}$

$\dim \mathbb{R}_{100}[x] = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$

$101 = 70 + 31$

$? \in \mathbb{R}^{50}$ $\qquad = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_{69} x^{69}\}$

$\ker F = [1, x, x^2, \dots, x^{69}]$ $\qquad \dim = 70$

$(\underline{a_0} + \underline{a_1} x + \dots + \underline{a_{69}} x^{69} + \underline{a_{70}} x^{70} + \dots + \underline{a_{100}} x^{100})$

$a_{70} + a_{71}, a_{71}, \dots 0,$ $\quad)$ lineární

$\dim \operatorname{im} = 101 - 70 = 31$

$(\underbrace{a_{70}, a_{71}, \dots, a_{100}}_{31 \text{ míst}}, \underbrace{0, 0, \dots 0}_{19 \text{ nul}})$

$F(a_0 + a_1 x + \dots + a_{100} x^{100}) =$

$= (a_{70}, a_{71}, \dots, a_{100}, 0, 0 \dots 0)$

$\ker F \qquad (a_{70}, a_{71}, \dots a_{100}, 0, 0 \dots 0) = (0, 0 \dots 0)$

$a_{70} = a_{71} = \dots = a_{100}$

$\ker F = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_{69} x^{69}\} = [1, x, \dots x^{69}]$

$\dim \ker F = 70$

$G(a_0 + a_1 x + \dots + a_{100} x^{100}) = ((a_{100}, a_{99}, \dots a_{70}), a_{70} + a_{71}, 0,$

$a_{80}, \dots)$

Příklad. 8.* Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení a $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_k) \in V$ lineárně nezávislé, pak jsou rovněž $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ lineárně nezávislé.

Cvičení (1) lin. nezávislost definice

(2) nepřímý důkaz

$\varphi(u_1), \ldots \varphi(u_k)$ jsou LN ve V $\Rightarrow$ $u_1, u_2, \ldots u_k$ jsou LN v U

$$p \Rightarrow q$$

nepřímý důkaz: místo $p \Rightarrow q$, dokazujeme

$$\neg q \Rightarrow \neg p.$$

Jsou-li $u_1 \ldots u_k$ LZ v U $\Rightarrow$ $\varphi(u_1), \ldots \varphi(u_k)$ jsou LZ ve V.

$u_1 \ldots u_k$ jsou LZ

$\exists (a_1 \ldots a_k) \in K^k$ $\quad (a_1, a_2, \ldots a_k) \neq (0, 0, \ldots 0)$

tak, že $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ku_k = \vec{0}$.

Aplikujeme lin. zobrazení φ na obě strany

$$\varphi\left(\sum a_i u_i\right) = \varphi(\vec{0})$$

$$a_1\varphi(u_1) + a_2\varphi(u_2) + \cdots + a_k\varphi(u_k) = \vec{0}$$

Dokázali jsme: $\exists (a_1 \ldots a_k) \neq (0, 0, \ldots 0)$, že

$$a_1\varphi(u_1) + a_2\varphi(u_2) + \cdots + a_k\varphi(u_k) = \vec{0}.$$

Tedy $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots \varphi(u_k)$ jsou lin. závislé. ■

$u_1 \ldots u_k$ závislé $\Rightarrow$ $\varphi(u_1), \ldots \varphi(u_k)$ závislé

$u_1, \ldots u_k$ jsou nezávislé $\Rightarrow$ $\varphi(u_1), \ldots \varphi(u_k)$ NEMUSÍ BÝT NEZÁVISLÉ

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

e_1, e_2, e_3 jsou lin. nezávislé, ale

$\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \in \mathbb{R}^2$ $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\to$ jsou lin. závislé.

$\varphi(v_1), \varphi(v_2) \in \mathbb{R}^2$ lin. nez.

$\Downarrow$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ jsou LN.

$\leftarrow$

$\varphi : U \to V$ je <u>lin. izo</u> (lineární + bijekce)

$u_1, \dots, u_k \in U$ jsou LN $\Leftrightarrow$ $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)$ jsou LN ve V