Soustavy lineárních rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_1$$

k - rovnic a n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$

a_{ij}, b_i koeficienty $\in \underbrace{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}}_{\mathbb{K}}$

Řešení n-tice $(x_1, \dots x_n)$

Matice soustavy

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \end{pmatrix}}_{n \text{ sloupců}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} k \text{ řádků}$$

Rozšířená matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & & & b_2 \\ & & & \vdots \\ a_{k1} & & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

a_{ij} koeficient v i-tém řádku
j-tém sloupci

b_i je v i-tém řádku

Na pravé straně samé 0

– homogenní soustava lin. rovnic

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0$$
$$\dots$$
$$a_{k1} x_1 + \dots + a_{kn} x_n = 0$$

má vždy řešení $(x_1, \dots x_n) = (0, 0, \dots, 0)$.

Nehomogenní soustava aspoň jedna $b_i \neq 0$.

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic

– úprava, kterou převádíme k jiné soustavě, která má stejnou množinu řešení

– neekvivalentní úprava – příklad

$x = 1$ řešení 1 $\rightsquigarrow$ $x^2 = 1$ řešení $1, -1$

Seznam elementárních ekvivalentních úprav

1) jednu rovnici vynásobíme NENULOVÝM číslem

2) dvě rovnice prohodíme (změníme pořadí)

3) k i-té rovnici přičteme c-násobek j-té rovnice

$$a_{i1} x_1 + \dots a_{in} x_n = b_i$$
$$a_{j1} x_1 + \dots a_{jn} x_n = b_j$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} (a_{i1} + c a_{j1}) x_1 + \dots + (a_{in} + c a_{jn}) x_n = b_i + c b_j \\ a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n = b_j \end{matrix}$$

Těmto ekv. úpravám odpovídají tzv. **elementární řádkové operace** s rozšířenou maticí soustavy

1) i-tý řádek vynásobíme číslem $a \neq 0$
2) prohodíme i-tý a j-tý řádek
3) k i-tému přičteme c-násobek j-tého řádku, $i \neq j$

! Těmito ekvivalentními úpravami chceme přejít ke soustavě, kterou umíme řešit.

Vedoucí koeficient řádku
- první nenulový koeficient v řádku matice

$$0 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \;\big|\; 10$$

Schodovitý tvar matice je tvar matice takový, že
(1) nulové řádky jsou za nenulovými
(2) Je-li a_{ij} vedoucí koeficient i-tého řádku, pak vedoucí koeficient řádku $i+1$ je $a_{i+1,k}$ kde $k > j$.

$$\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{i+1,k} & & & \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$ je ve schod. tvaru

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$ není ve schod. tvaru

TVRZENÍ

! Soustavu s maticí ve schod. tvaru umíme vyřešit.

Mohou nastat 2 možnosti

(1) v matici je řádek

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \neq 0 \end{array}\right)$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = c$$ nemá řešení

Ani soustava nemá řešení.

(2) Výše uvedený řádek v matici není.

U každého ved. koeficientu stojí některá neznámá.

Řešení na příkladu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 3$$
$$x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$$
$$x_4 + 2x_5 = 1$$

Neznámé, které nestojí u ved. koef. si zvolíme za parametry $x_5 = p$ $x_2 = q$

Neznámé u ved. koeficientů spočítáme a odzadu máme

$$x_4 = 1 - 2x_5 = 1 - 2p$$

$$x_3 = -x_5 - 2x_4 = 3p-2 \quad \text{z 2. rovnice}$$

z 1. rovnice

$$x_1 = 3 + 2x_3 - x_4 - x_5 = \dots = 7p-2$$

Všechna řešení soustavy jsou 5-tice

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (7p-2,\ q,\ 3p-2,\ 1-2p,\ p)$$

$$p, q \in \mathbb{K}$$

Věta (Gaussova eliminace)
Každou matici lze pomocí element. řádk. operací převést na schodovitý tvar.

Gaussova eliminace = algoritmus, který tohle provádí

Proveďme na příkladu

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení – volíme $x_3 = p$, $x_4 = q$

$$5x_2 = -6 + 8x_3 - x_4 = -6 + 8p - q$$

$$x_2 = -\frac{6}{5} + \frac{8}{5}p - \frac{q}{5}$$

$$x_1 = 2 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 - \frac{6}{5} + \frac{8}{5}p - \frac{q}{5} - 4p + q \ldots$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{12}{5}p + \frac{4}{5}q$$

Gaussův algoritmus teoreticky

- nechť 1. sloupec s nenulovými čísly je j-tý
- nechť 1. nenulové číslo v tomto sloupci je a_{ij}

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & j\text{-tý} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & a_{ij} \neq 0 & \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

přehodíme 1. a i-tý řádek

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1j} \neq 0 & \\ & & & \vdots & \\ & & & a_{sj} & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

$a_{sj} = 0$ vše OK nic neděláme

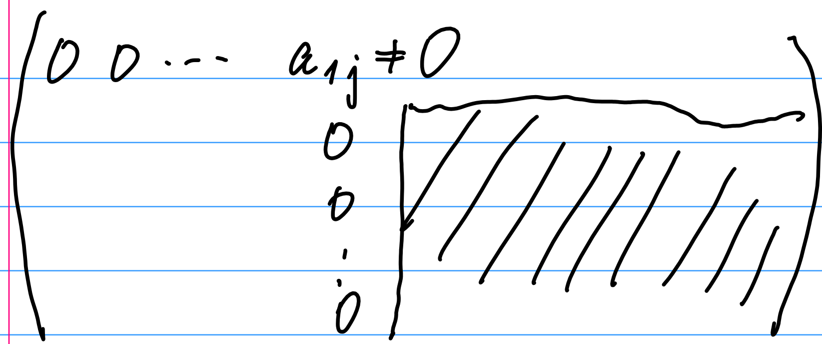
$a_{sj} \neq 0$

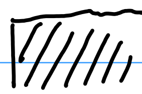
Od s-tého řádku odečteme

$\frac{a_{sj}}{a_{1j}}$ -násobek 1. řádku

Co dostaneme v s-tém řádku?

$$a_{sj} - \frac{a_{sj}}{a_{1j}} \cdot a_{1j} = a_{sj} - a_{sj} = 0$$



Stejný postup provádíme s vyznačenou podmaticí. 

Postupujeme takto tak dlouho, dokud nedostaneme buď nulovou matici, nebo matici s jedním řádkem.

Výsledkem je matice ve schodovitém tvaru.