4. přednáška: Vektorové prostory – základní pojmy

Opakování: Vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$) je neprázdná množina U (její prvky budeme nazývat vektory) společně s operacemi $+ : U \times U \longrightarrow U$ (sčítání vektorů)
a $\cdot : \mathbb{K} \times U \longrightarrow U$ (násobení číslem),
které splňují jisté vlastnosti (je jich 8, viz. minulá přednáška).

Budeme pokračovat v příkladech vekt. prostorů:

① Polynomy s koeficienty v $\mathbb{K}$ v proměnné x stupně nejvýše n. Značení $\mathbb{K}_n[x]$. Jde o vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Sčítání polynomů a násobení skalárem jsme definovali minule pro množinu $\mathbb{K}[x]$ všech polynomů s koeficienty v $\mathbb{K}$ v proměnné x.

② Zobrazení množiny M do reálných čísel. Tuto množinu značíme $\mathbb{R}^M = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R}\}$
sčítání funkcí $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Součtem $f+g$ je funkce s hodnotami: $(f+g)(m) = \underbrace{f(m)+g(m)}_{\text{součet reálných čísel}}$ $m \in M$
Vynásobením funkce f číslem $a \in \mathbb{R}$ dostaneme funkci $a f$
$$(a \cdot f)(m) = \underbrace{a \cdot f(m)}_{\text{násobení reálných čísel}}$$

$\mathbb{R}^M$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$
- nulový vektor je nulová funkce $f(m) = 0$ pro všechna m
- opačný vektor k funkci g je funkce $(-g)$ taková, že $(-g)(m) = -g(m)$ pro všechna $m \in M$

Příklady: $M = [0,1]$ $\mathbb{R}^{[0,1]}$ = množina všech reálných funkcí na intervalu $[0,1]$.

$M = \{1,2,3,\dots n\}$ Potom $\mathbb{R}^M$ je množina funkcí

$$f : \{1,2,\dots n\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

což není nic jiného než n-tice reálných čísel

$$(f(1), f(2), \dots, f(n))$$

a to je množina $\mathbb{R}^n$, kterou jsme jako příklad vekt. prostoru již měli.

Další vlastnosti operací na vektorovém prostoru

Ze základních vlastností (axiómů) vekt. prostoru (1)-(4) pro sčítání a (5)-(8) pro násobení lze odvodit další vlastnosti.

(A) $\forall \vec{u} \in U$ platí $0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$ (0 je čísla $0 \in \mathbb{K}$, $\vec{o}$ je nul. vektor)

(B) $\forall a \in \mathbb{K}$ platí $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$

(C) Jestliže pro $a \in \mathbb{K}$ a $\vec{u} \in U$ platí $a \cdot \vec{u} = 0$, pak

$$a = 0 \text{ nebo } \vec{u} = \vec{o}.$$

(D) $\forall \vec{u} \in U$ platí $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

Důkazy: jsou krátké, ale pro začátečníka trikové.

(A) $\underline{0 \cdot \vec{u}} = (0+0) \cdot \vec{u} = \underline{0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{u}}$ (k rovnici přičteme $-0 \cdot \vec{u}$)

$$\underbrace{0 \cdot \vec{u} + (-0 \cdot \vec{u})}_{\vec{o}} = 0 \cdot \vec{u} + \underbrace{0 \cdot \vec{u} + (-0 \cdot \vec{u})}_{\vec{o}}$$

$$= 0 \cdot \vec{u} + \vec{o}$$

$$0 = 0 \cdot \vec{u},$$ což jsme chtěli dokázat

Použili jsme pouze pravidla (2), (3), (4) a (5) z definice VP.

(B) Použijeme analogický trik:

$\underline{a \cdot \vec{o}} = a \cdot (\vec{o} + \vec{o}) = \underline{a \cdot \vec{o} + a \cdot \vec{o}}$ (k oběma stranám přičteme $-a \cdot \vec{o}$)

$$\underbrace{a \cdot \vec{o} + (-a \cdot \vec{o})}_{\vec{o}} = a \cdot \vec{o} + \underbrace{a \cdot \vec{o} + (-a \cdot \vec{o})}$$

$$= a \cdot \vec{o} + \vec{o}$$

$$\vec{o} = a \cdot \vec{o}$$ a jsme hotovi.

(C) Nechť $a \cdot \vec{u} = \vec{0}$. Je-li $a = 0$ jsme hotovi. Předpokládejme, že $a \neq 0$. Potom rovnici

$$a \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

vynásobíme číslem $a^{-1} \in \mathbb{K}$. Dostaneme

$$a^{-1} \cdot (a \cdot \vec{u}) = a \cdot \vec{0}$$

Použijeme vlastnost (7) a vlastnost (B), kterou jsme již dokázali.

$$(a^{-1} a) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$
$$1 \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Použitím vlastnosti (8) dokážeme $\vec{u} = \vec{0}$.

(D) $\underline{(-1) \cdot \vec{u} + \vec{u}} = (-1) \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{u} = (-1+1) \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} = \underline{(-\vec{u}) + \vec{u}}$

Od obou stran výše uvedené rovnice přičteme $(-\vec{u})$

$$((-1) \cdot \vec{u} + \vec{u}) + (-\vec{u}) = ((-\vec{u}) + \vec{u}) + (-\vec{u})$$
$$(-1) \cdot \vec{u} + \underbrace{(\vec{u} + (-\vec{u}))} = (-\vec{u}) + \underbrace{(\vec{u} + (-\vec{u}))}$$
$$(-1) \cdot \vec{u} + \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{0}$$
$$(-1) \cdot \vec{u} = (-\vec{u})$$

Důkaz je ukončen.

<u>Vektorový podprostor</u> vektorového prostoru U nad $\mathbb{K}$ je každá <u>neprázdná podmnožina</u> $V \subseteq U$ taková, že

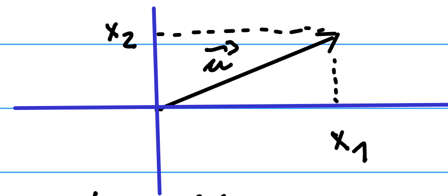
(1) $\forall\, u, v \in V \quad \vec{u} + \vec{v} \in V$

(2) $\forall a \in \mathbb{K},\ \forall v \in V \quad a \cdot \vec{v} \in V$

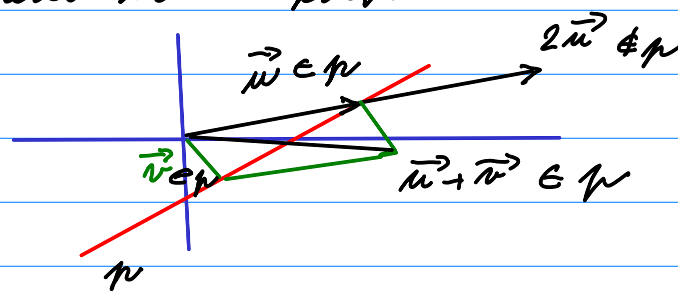
Tato definice znamená, že operace sčítání vektorů a násobení vektoru číslem „funguje" na množině V. Říkáme, že V je uzavřená na tyto dvě operace.

Příklad 1 Vektorové podprostory ve vektorovém prostoru $U = \mathbb{R}^2$ (geometricky rovina s počátkem – to je nulový vektor)

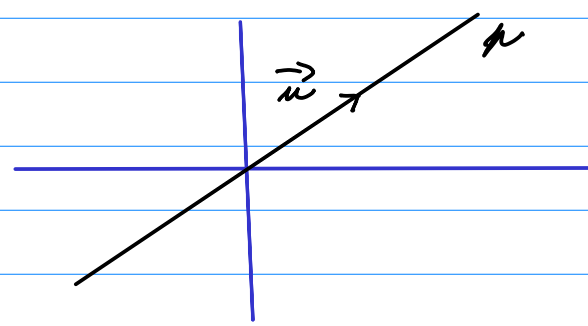
$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$



Tato červená přímka není vekt. podprostor



Přímka procházející počátkem je vekt. podprostor v $\mathbb{R}^2$:



$\vec{u} \in p$

$a\vec{u} \in p$

$\vec{u}, \vec{v} \in p \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in p$

Počátek $V = \{(0,0) \in \mathbb{R}^2\}$ je vekt. podprostor.

Samozřejmě $V = \mathbb{R}^2$ je vekt. podprostor v $\mathbb{R}^2$.

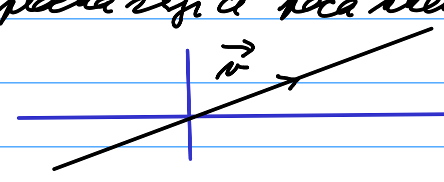
Ukážeme, že všechny vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou výše popsané, tj

(i) počátek

(ii) přímky procházející počátkem

(iii) celé $\mathbb{R}^2$

Nechť $V \subseteq \mathbb{R}^2$ je vekt. podprostor obsahující nenulový vektor $\vec{v}$. Pak obsahuje i vektory $a \cdot \vec{v}$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$, tedy přímku procházející počátkem se směrovým vektorem $\vec{v}$

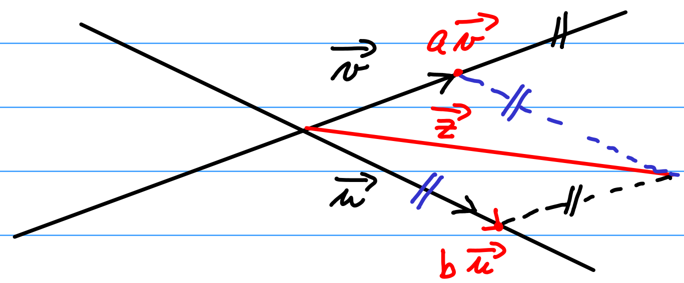


Jestliže V neobsahuje vektory neležící na přímce – je to vekt. prostor tvořený přímkou procházející počátkem.

Nechť V obsahuje vektor $\vec{u}$ neležící na přímce

$$p = \{a \cdot \vec{v},\ a \in \mathbb{R}\}.$$

Potom V musí obsahovat všechny vektory $b \cdot \vec{u}$ a by tvořil také přímku:



Pak každý vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$ je součtem vektorů ležících na přímkách

$$p = \{a\vec{v},\ a \in \mathbb{R}\}$$
$$q = \{b\vec{u},\ b \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{z} = \underbrace{a\vec{v}}_{\in V} + \underbrace{b\vec{u}}_{\in V} \in V$$

Tedy $V = \mathbb{R}^2$

Příklad 2 Analogicky lze ukázat, že podprostory v $\mathbb{R}^3$ jsou

(i) počátek (= množina obsahující nulový vektor)

(ii) přímky procházející počátkem

(iii) roviny procházející počátkem

(iv) celé $\mathbb{R}^3$

Příklad 3 (důležitý!) Uvažujme vektorový prostor $U = \mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. n-tice reálných čísel budeme psát ve tvaru sloupců $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Uvažujme matici

$A = (a_{ij})$ tvaru $k \times n$. Potom množina řešení HOMOGENNÍ soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

je vektorový podprostor v $\mathbb{R}^n$. Kratší zápis pomocí maticového násobení:

$V = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0 \in \mathbb{R}^k\}$ je vekt. podprostor.

Zdůvodnění:

(0) V je neprázdná množina, obsahuje nulový vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) Jestliže $x, y \in V$, pak $Ax = 0$, $Ay = 0$. Sečtením

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0$$

Tedy $x+y \in V$.

(2) Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $x \in V$, pak $Ax = 0$. Potom $A(ax) = a(Ax) = a \cdot 0 = 0$. Tedy $ax \in V$.

Lineární kombinace vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k} \in U$

je vektor zapsaný takto

$$a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + \dots + a_k\vec{u_k} \in U,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$.

Jeden vektor u_1 : všechny násobky $a\vec{u_1}$

Dva vektory u_1, u_2 : $a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2}$

Žádný vektor .... prázdná lineární kombinace je $\vec{0}$.

Lemma: Je-li V vekt. podprostor v U a $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k} \in V$, pak lineární kombinace $a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \dots + a_k\vec{v_k} \in V$.

Důkaz indukcí podle k

Pro $k = 1$ to plyne z definice vekt. podprostoru

$\vec{v}_1 \in V \Rightarrow a_1\vec{v}_1 \in V$

Nechť tvrzení platí pro $k-1 \geq 1$. Nechť $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ a uvažujeme lin. kombinaci

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_k\vec{v}_k$$

Podle ind. předpokladu

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_{k-1}\vec{v}_{k-1} \in V \quad a \quad \vec{v}_k \in V.$$

Pak také $a_k\vec{v}_k \in V$ (z definice podprostoru) a součet vektorů z V leží ve V. Tedy

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_k\vec{v}_k = \underbrace{(a_1\vec{v}_1 + \dots + a_{k-1}\vec{v}_{k-1})}_{\in V} + \underbrace{(a_k\vec{v}_k)}_{\in V} \in V.$$

□

Lineární obal vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k \in U$

je množina $\{\vec{w} \in U;\ \vec{w} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k$ pro nějaká $a_1, a_2, \dots a_k \in K\}$

Lineární obal vektorů budeme značit symbolem

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_k].$$

Lemma: Lineární obal vektorů je vektorový podprostor v U.

Důkaz: Nechť $\vec{u}, \vec{v} \in [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k]$. To znamená, že $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k$, $\vec{v} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + \dots + b_k\vec{u}_k$.

Potom také

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1+b_1)\vec{u}_1 + (a_2+b_2)\vec{u}_2 + \dots + (a_k+b_k)\vec{u}_k \in [\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k]$$

$$c\vec{u} = ca_1\vec{u}_1 + ca_2\vec{u}_2 + \dots + ca_k\vec{u}_k \in [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$$

Přitom lin. obal je neprázdný, neboť $\vec{o} \in [\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k]$.

Lineární obal prázdné množiny vektorů je prázdná lin. kombinace tedy nulový vektor.

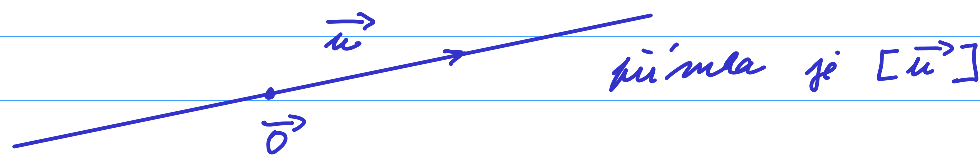
$$[\emptyset] = \{\vec{o}\}.$$

Příklady Lineární obaly v $\mathbb{R}^2$

$[\vec{o}] = \{a \cdot \vec{o},\ a \in \mathbb{R}\} = \{\vec{o}\}$ počátek

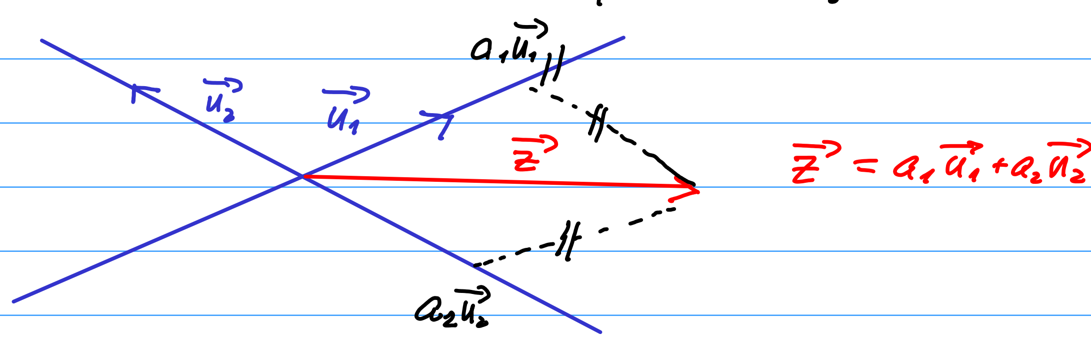
$\vec{u} \neq \vec{o}$

$[\vec{u}] = \{a\vec{u} \in \mathbb{R}^2,\ a \in \mathbb{R}\}$ .. přímka procházející počátkem

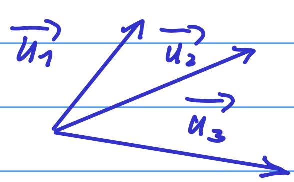


$\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ neleží v jedné přímce

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \{a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 \in \mathbb{R}^2,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$



Lineární obal 3 vektorů v rovině



$[u_1, u_2, u_3] \supseteq [u_1, u_2] = \mathbb{R}^2$

Tedy

$[u_1, u_2, u_3] = \mathbb{R}^2 = [u_1, u_2]$

Typický příklad Leží daný vektor $\vec{v}$ v lineárním obalu $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k]$? Problém je ekvivalentní s otázkou: Má rovnice

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k = \vec{v}$$

o neznámých $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$ řešení?

Pokud ano, pak $v \in [\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k}]$.
Pokud ne, pak $v \notin [\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_k}]$.

Konkrétně: $U = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Leží matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ v $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$?

Existují $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ?$$

Porovnáním prvků v i-tém řádku a j-tém sloupci dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_1 + 0\cdot a_2 &= 1 \\ 2a_1 + 2a_2 &= 2 \\ 0\cdot a_1 + a_2 &= 3 \\ a_1 + a_2 &= 4 \end{aligned}$$

Z první rovnice $a_1 = 1$, z 3. rovnice $a_2 = 3$. Ale s těmito čísly není splněna 2. rovnice

$$2\cdot 1 + 2\cdot 3 \neq 2.$$

Soustava nemá řešení. A neleží v lin. obalu.