5. přednáška Lineární nezávislost, báze

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

Definice: Řekneme, že $u_1, u_2, \dots u_k \in U$ jsou lineárně závislé, jestliže existuje

$(x_1, x_2, \dots x_k) \in \mathbb{K}^k$ taková, že

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = \vec{0} \quad \wedge \quad (x_1, x_2, \dots x_k) \neq (0, 0, \dots 0)$$

Příklady (1) Máme jediný vektor u. Lin. závislost znamená $\quad x u = \vec{0} \quad x \neq 0$

Pak $u = \vec{0}$.

(2) Co znamená, že dva vektory jsou lin. závislé

$$a u + b v = \vec{0} \quad \wedge \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

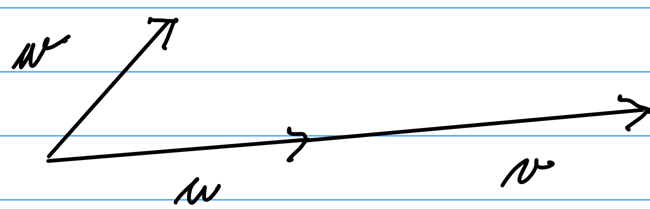
Předp. že $a \neq 0$

$$a u = -b v \quad / \, a^{-1} \qquad a \neq 0$$

$$u = a^{-1} a u = -a^{-1} b v$$

Jeden vektor je násobkem druhého.

$\mathbb{R}^2$



u, v jsou lin. závislé

u, w nejsou lin. závislé

(3) $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. závislé

$$x_1 u_1 + \dots + x_k u_k = \vec{0} \quad \wedge \quad (x_1, \dots x_k) \neq (0, \dots 0)$$

$\exists x_i \neq 0$ $\quad x_i u_i = -x_1 u_1 - x_2 u_2 - \dots - x_{i-1} u_{i-1} - x_{i+1} u_{i+1} - \dots - x_k u_k$

Vynásobíme x_i^{-1}

$$u_i = -x_i^{-1} x_1 u_1 - \dots - x_i^{-1} x_{i-1} u_{i-1} - \dots - x_i^{-1} x_k u_k$$

Závěr: jeden z vektorů je lin. kombinací ostatních.

Lemma: Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. závislé, právě když jeden z nich je lin. kombinací ostatních.

$\mathbb{R}^3$ $\quad$ 3 vektory v rovině $\Rightarrow$ jsou lin. závislé

3 vektory neležící v jedné rovině $\Rightarrow$ nejsou lin. závislé.

S definicí se daleko lépe počítá

$u_1, \dots u_k$ jsou lin. závislé, jestliže rovnice v neznámých $x_1, x_2, \dots, x_k$

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots x_k u_k = \vec{0}$$

má nenulové řešení $(x_1, \dots x_k) \neq (0, 0, \dots 0)$.

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lin. nezávislé, jestliže platí negace výroku

$$\exists (x_1 \dots x_k) \in \mathbb{K}^k \quad x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k = \vec{0} \wedge (x_1, x_2, \dots x_k) \neq (0, 0, \dots 0)$$

Tato negace je:

$$\forall (x_1, \dots x_k) \in \mathbb{K}^k : x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots x_k u_k = \vec{0} \Rightarrow (x_1, x_2, \dots x_k) = (0, 0, \dots 0)$$

pro všechny

$$\neg (p \Rightarrow q) = p \wedge \neg q$$

Definice: Vektory $u_1, u_2 \dots u_k$ jsou lineárně nezávislé, jestliže

$$\forall (x_1, \dots x_k) \in \mathbb{K}^k \quad x_1 u_1 + \dots + x_k u_k = \vec{0} \Rightarrow (x_1, x_2 \dots x_k) = (0, 0, \dots 0)$$

Prakticky: rovnice $x_1 u_1 + \dots x_k u_k = \vec{0}$ v neznámých $x_1, x_2 \dots x_k$ má pouze jediné řešení $(x_1 \dots x_k) = (0, 0, \dots 0)$.

Poznámka: častá chyba v definici

$$\forall (x_1 \dots x_k) \in \mathbb{K}^k \quad x_1 u_1 + \dots + x_k u_k = \vec{0} \cancel{\wedge} (x_1, x_2 \dots x_k) = (0, \dots 0)$$

Příklad $u_1 = (1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, -1, 2)$, $u_3 = (1, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ jsou lin. nezávislé?

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = \vec{0}$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Porovnání složek 1., 2., 3., 4.:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Homogenní soustava rovnic.

Matice soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0$
$x_2 = 0$
$x_1 = 0$

Závěr: vektory u_1, u_2, u_3 jsou lin. nezávislé.

Definice: Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ generují vektorový prostor U, jestliže

$$\forall u \in U \ \exists (x_1, x_2 \dots x_n) \in K^n \quad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

Jinak:

$$[u_1, u_2, \dots, u_n] = U$$

Definice: U je vekt. prostor konečné dimenze, jestliže existuje konečná množina vektorů, které generují U.

Příklady (1) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ je prostor konečné dimenze, je generován vektory

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Libovolný vektor v $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) $U = \mathbb{R}_n[x]$ polynomy stupně $\leq n$
je prostor konečné dimenze generovaný polynomy např.

$$x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i\right) = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \qquad + a_1 \cdot x + a_0 \cdot 1}_{\text{lin. kombinace}}$$

(3) $\mathbb{R}[x]$ polynomy v proměnné x bez omezení stupně

není generován konečnou množinou polynomů $\{p_1, p_2 \dots p_k\}$

Není vekt. prostor konečné dimenze.

(4) $C[0,1]$ spojité reálné funkce na intervalu $[0,1]$ není gen. kon. množinou

Báze vektorového prostoru   Essence of linear algebra, ch. 2.

Definice: Nechť U je vekt. prostor konečné dimenze. Uspořádaná n-tice vektorů $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ je BÁZE prostoru U nad $\mathbb{K}$, jestliže

(1) vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ generují prostor U

$$\forall u \in U \quad \exists (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

(2) $u_1, u_2, \dots u_n$ jsou lin. nezávislé

$$\forall (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{K}^n \quad a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = \vec{0} \Rightarrow (a_1 \dots a_n) = (0, \dots 0)$$

Příklady: (1) $\mathbb{R}^3$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

tvoří bázi: generují $\mathbb{R}^3$

pak lin. nezávislé:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned} \ \checkmark$$

$$\begin{aligned} a_1 + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + a_2 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Jiná báze:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Generují $\mathbb{R}^3$ Rovnice

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

má řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array} \right) \qquad \begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_2 \\ x_3 &= b_3 - x_1 - x_2 \\ &= b_3 - b_2 - b_1 \end{aligned}$$

u_1, u_2, u_3 generují $\mathbb{R}^3$

Lin. nezávislé

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

jsou lin. nezávislé.

(2) $U = \mathbb{R}_3[x]$

Báze je např.: $1, x, x^2, x^3$

$$a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Naším dalším cílem je

(1) dokázat, že každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi

(2) každé dvě báze v daném prostoru konečné dimenze mají stejný počet prvků.

Věta o výběru lin. nezávislých vektorů

Nechť $v_1, v_2 \dots v_k \in U$ jsou lineárně nezávislé vektory.

Nechť $u_1, u_2, \dots, u_\ell \in U$ jsou libovolné vektory.

Pak lze vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_s}$ tak, že

(1) $v_1, v_2, \dots, v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_s}$ jsou lin. nezávislé,

(2) $[v_1, v_2, \dots v_k, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_s}] = [v_1, \dots v_k, u_1, u_2, \dots u_\ell]$.

Důsledek: Nechť U je vekt. prostor konečné dimenze. Pak každý seznam lin. nezávislých vektorů lze doplnit na bázi.

Speciálně: Každý vekt. prostor konečné dimenze má bázi.

Důkaz: U je vekt. prostor konečné dimenze. Existují vektory $u_1, u_2, \dots u_\ell \in U$ tak, že

$$[u_1, u_2, \dots u_\ell] = U.$$

Mějme lin. nezávislé vektory $v_1, v_2, \dots v_k \in U$.
Aplikujme předchozí větu,

$v_1 \dots v_k$ lin. nezávislé

$u_1, \dots u_\ell$

Podle věty lze vybrat $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_s}$ tak, že

1) $v_1, v_2 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_s}$ lin. nezávislé
2) $[v_1, v_2 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_s}] = [v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_\ell]$

Tvrdíme, že vektory $v_1 \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_s}$ tvoří bázi prostoru U.

- jsou lin. nezávislé podle 1)
- generují U

$$[v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_s}] = [v_1 \dots v_k, \underbrace{u_1, \dots u_\ell}_{\cup\!|\;[u_1, u_2 \dots u_\ell] = U}] \quad \subseteq U$$

$$[v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_s}] = [v_1 \dots v_k, u_1, \dots u_\ell] = U$$

$\blacksquare$

Důležitý algoritmus - realizuje větu o výběru lin. nezávislých vektorů prakticky

$u_1, u_2, \dots u_\ell \in \mathbb{K}^n$. Z nich chceme vybrat vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_s}$, které jsou

- lin. nezávislé
- mají stejný lin. obal jako $u_1, u_2 \dots u_\ell$

$$[u_{i_1} \dots u_{i_s}] = [u_1, u_2, \dots u_\ell]$$

Vektory $u_1, \dots u_\ell$ napíšeme jako sloupce do matice $n \times \ell$.

S touto maticí provádíme el. řádk. operace tak, abychom ji převedli na schod. tvar.

V tomto schod. tvaru určíme sloupce $i_1, i_2, \dots, i_s$, kde leží vedoucí koeficienty řádků.
Vektory $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_s}$ mají požadované vlastnosti.

$i_1 = 1$. $i_2 = 2$ $i_3 = 4$

Zdůvodnění:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{el. řádk. operace}} \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

čísla sloupců $\longrightarrow$ ① ② ③ ④

schod. tvar

u_1, u_2, u_4 — tyto vektory vybereme

1) u_1, u_2, u_4 jsou lin. nezávislé. Řešíme rovnici neznámé x_1, x_2, x_4

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_4 u_4 = 0 \checkmark$$

Příslušná matice

$$x_1 u_1 = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{stejné el. řádk. operace jako výše}} \begin{pmatrix} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

$2x_1$
$3x_1$
$4x_1$
$8x_1$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(2) Tvrdím, že u_3 je lineární kombinací předchozích vektorů u_1 a u_2.

Řešíme rovnici

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 = u_3 . \checkmark$$

Matice soustavy

$$\left(u_1 \ \ u_2 \mid u_3 \right) \xrightarrow[\text{operace}]{\text{stejné el. řádk.}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 2 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \checkmark$$

stejný výsledek → 3. sloupec

Soustava má řešení.

$$[u_1, u_2, u_3, u_4] \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} [u_1, u_2, u_4]$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4 =$$

$$= a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 (x_1 u_1 + x_2 u_2) + a_4 u_4$$

$$= (a_1 + a_3 x_1) u_1 + (a_2 + a_3 x_2) u_2 + a_4 u_4 \in [u_1, u_2, u_4]$$

Poznámka $v_1 \dots v_k$ lin. nezávislé

$u_1 \dots u_l$ libovolné

$$\left(v_1 \dots v_k \ u_1 \dots u_l \right) \sim \dots \sim \begin{pmatrix} \overset{1}{\circ} & & & & & & \\ & \circ & & & & & \\ & & \ddots & \overset{k}{\circ} & & & \\ & & & & \overset{i_1}{\circ} & & \\ & & & & & \overset{i_2}{\circ} & \\ & & & & & & \overset{i_s}{\circ} \end{pmatrix}$$

Větu o výběru lze algoritmicky plně realizovat.

Důkaz: Matematickou indukcí podle $\ell \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

$v_1, \dots v_k$ lin. nezávislé

$u_1, u_2 \dots u_\ell$ libovolné. Vybereme $u_{i_1} \dots u_{i_s}$, že

→ (1) $v_1 \dots v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}$ jsou lin. nezávislé

→ (2) $[v_1 \dots v_k, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}] = [v_1, \dots v_k, u_1 \dots \underline{u_\ell}]$

První krok pro $\ell = 0$ ... seznam vektorů u je prázdný, nic nevybereme a (1) a (2) platí

Indukční krok předp. že tvrzení platí pro ℓ
a dokazujeme ho pro $\ell + 1$

$v_1 \dots v_k$ lin. nezávislé

$u_1, \dots u_{\ell+1}$ libovolné

Z $u_1, \dots u_\ell$ jsme vybrali $u_{i_1} \dots u_{i_s}$, že platí (1) a (2) výše

Máme vybrat také $u_{\ell+1}$?

1. možnost $u_{\ell+1} \in [v_1, v_2, \dots v_k, \underline{u_{i_1}, \dots, u_{i_s}}]$.

V tomto případě vektor $u_{\ell+1}$ nevybereme.

(1) $v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}$ jsou lin. nezávislé podle ind. předpokladu

(2) $[v_1 \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}] \overset{?}{=} [v_1 \dots v_k, u_1, u_2, \dots u_{\ell+1}]$

$$u_{\ell+1} = \sum a_j v_j + \sum_{s=1}^{r} b_s u_{i_s}$$

$u_{\ell+1} \in [v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}]$

Pak $[v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_{\ell+1}] = [v_1, \dots v_k, u_1 \dots u_\ell] \overset{\text{ind. předp.}}{=} [v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}]$

2. možnost $u_{\ell+1} \notin [v_1, \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}]$

Pak $u_{\ell+1}$ přidáme mezi vybrané

(2) $[v_1, \dots v_k, u_{i_1}, \dots u_{i_r}, u_{\ell+1}] =$

$= [v_1, \dots v_k, u_1 \dots u_\ell, u_{\ell+1}]$

Musíme ukázat, že $v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_r}, u_{\ell+1}$ jsou lin. nezávislé.

$$\sum_{j=1}^{k} a_j v_j + \sum_{s=1}^{r} b_s u_{i_s} + c\, u_{\ell+1} = \vec{0}$$

Když $c = 0$. Pak $\sum a_j v_j + \sum b_s u_{i_s} = \vec{0}$ a protože $v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_s}$ jsou lin. nez., tak $a_j = 0$, $b_s = 0$.

Případ $c \neq 0$ nemůže nastat, neboť pak bychom $u_{\ell+1}$ napsali jako lin. kombinaci:

$$u_{\ell+1} = -\, c^{-1}\left(\sum a_j v_j + \sum b_s u_{i_s}\right) \in [v_1 \dots v_k, u_{i_1} \dots u_{i_s}]$$

Spa s předpokladem.