7. přednáška Lineární zobrazení

Lemma: Lineární zobrazení $\varphi: U \to V$ je prosté, právě když $\ker \varphi = \{\vec{o}\}$.
Lineární zobrazení $\varphi: U \to V$ je na (surjektivní), právě když $\operatorname{im} \varphi = V$.

Důkaz: Nechť $\varphi: U \to V$ je prosté a nechť $u \in \ker\varphi$. Pak
$$\varphi(u) = \vec{o} = \varphi(\vec{o})$$
Vzhledem k tomu, že φ je prosté musí být $u = \vec{o}$. Tedy $\ker\varphi = \{\vec{o}\}$.

Nechť $\ker \varphi = \{\vec{o}\}$ a nechť $\varphi(u) = \varphi(w)$. Pak
$$\varphi(u-w) = \varphi(u) - \varphi(w) = \vec{o}$$
Tedy $u - w \in \ker \varphi = \{\vec{o}\}$. Proto $u - w = \vec{o}$, odkud $u = w$.
Dokázali jsme, že φ je prosté.

Druhá část věty není nic jiného než definice zobrazení na.

Lemma: Je-li lineární zobrazení $\varphi: U \to V$ bijekce, pak inverzní zobrazení $\varphi^{-1}: V \to U$ je také lineární.
Jsou-li $\varphi: U \to V$ a $\psi: V \to W$ lineární, pak jejich složení $\psi \circ \varphi: U \to V$ je rovněž lineární.

Definice: Lineárnímu zobrazení $\varphi: U \to V$, které je bijekcí, říkáme <u>lineární izomorfismus</u>.

Příklad: nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ dimenze n s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$. Zobrazení „souřadnice vektoru v bázi α"

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow K^n : u \longmapsto (u)_\alpha \in K^n$$

je lineární, prosté a na. Tedy bijekce, tudíž lineární izomorfismus.

Jestliže $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ a $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, pak

$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i$. Proto pro $c, d \in K$ je

$$cu + dv = c\left(\sum_1^n a_i u_i\right) + d\left(\sum_1^n b_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (ca_i + db_i) u_i$$

Proto

$$(cu + dv)_\alpha = c\,(u)_\alpha + d\,(v)_\alpha .$$

Zobrazení $(\ )_\alpha$ je lineární.

$(\ )_\alpha$ je prosté, neboť $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ znamená, že

$u = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n = \vec{o}$. $\ker(\ )_\alpha = \{\vec{o}\}$.

Zobrazení $(\ )_\alpha$ je na, neboť pro každou n-tici $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$

existuje vektor $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, pro který

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Důležitý příklad - skládání lin. zobrazení a násobení matic

Nechť $\varphi : K^n \to K^k$ a $\psi : K^k \to K^l$ jsou zadány pomocí násobení maticí, tj.

$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ kde } A \text{ je matice tvaru } k \times n$$

$$\psi(y) = By = B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}, \text{ kde } B \text{ je matice tvaru } k \times l.$$

Potom složené zobrazení je násobení součinem matic $B \cdot A$:

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = B(Ax) = (B \cdot A)x.$$

Je-li $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ zadána $\varphi(x) = Ax$, kde A je matice $n \times n$, pak φ je lineární izomorfismus, právě když existuje inverzní matice A^{-1}. Potom

$$\varphi^{-1}(y) = A^{-1}y.$$

Věta o dimenzi jádra a obrazu

Nechť $\varphi : U \to V$ je lineární zobrazení a nechť $\dim_{\mathbb{K}} U < \infty$. Pak je rovněž $\dim_{\mathbb{K}} \ker\varphi < \infty$ a $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im}\varphi < \infty$ a platí

$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} \ker\varphi + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im}\varphi.$$

Důkaz: Nechť

$u_1, u_2, \dots, u_k$ je báze $\ker\varphi$.

Doplníme ji na bázi

$u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ celého prostoru U.

K důkazu tvrzení stačí dokázat, že

$\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ je báze $\operatorname{im}\varphi$.

(1) $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ generují $\operatorname{im} \varphi$.

Každý prvek $\operatorname{im} \varphi$ je tvaru $\varphi(u)$, kde $u \in U$.

Protože $u_1 \dots u_n$ je báze U je

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

Proto $$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(u_i).$$

Protože však $u_1 \dots u_k \in \ker \varphi$, je $\varphi(u) = \sum_{i=k+1}^{n} a_i \varphi(u_i)$, proto $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ generují $\operatorname{im} \varphi$.

(2) Vektory $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou lineárně nezávislé.

Nechť
$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \varphi(u_i) = \vec{0}$$

Potom $$\varphi\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i\right) = \vec{0}$$

Proto $$\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i \in \ker \varphi \quad \text{a tedy}$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i = \sum_{j=1}^{k} b_j u_j$$ neboť $u_1, \dots u_k$ je báze $\ker \varphi$

Odtud $$\sum_{j=1}^{k} (-b_j) u_j + \sum_{i=k+1}^{n} a_i u_i = \vec{0}.$$

Z lin. nezávislosti $u_1, u_2, \dots, u_n$ plyne
$$-b_1 = -b_2 = \dots = -b_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0.$$

Tedy $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$, a proto jsou vektory $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ lineárně nezávislé.

Matice lineárního zobrazení

Každá matice A typu $k \times n$ zadává lineární zobrazení
$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{z } K^n \text{ do } K^k.$$

Nyní každému lineárnímu zobrazení $\varphi : U \to V$, kde U je vekt. prostor s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a V je vekt. prostor s bází $\beta = (v_1, v_2, \dots v_k)$ přiřadíme matici A typu $k \times n$. Bude to něco podobného jako když vektoru $v \in V$ přiřadíme jeho souřadnice $(v)_\beta \in K^k$.

Toto přiřazení uděláme tak, že sloupce matice A budou souřadnice vektorů $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots \varphi(u_n)$ v bázi β:

$$\boxed{(\varphi)_{\beta,\alpha} = A = \left((\varphi(u_1))_\beta, (\varphi(u_2))_\beta, \dots, (\varphi(u_n))_\beta \right)}$$

To znamená, že $A = (a_{ij})$ a platí

$$\varphi(u_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{k1} v_k = (v_1 v_2 \dots v_k)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(u_2) = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{k2} v_k = (v_1 v_2 \dots v_k)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi(u_n) = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \dots + a_{kn} v_k = (v_1, v_2, \dots v_k)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$$

To lze napsat v této podobě

$$\left(\varphi(u_1)\ \varphi(u_2) \dots \varphi(u_n)\right) = (v_1, v_2, \dots, v_k) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{kn} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= (v_1\ v_2 \dots v_k)\ A.$$

<u>Příklad</u> Nechť $U = \mathbb{R}_3[x]$ $\quad \alpha = (1, x, x^2, x^3)$

$V = \mathbb{R}_2[x]$ $\quad \beta = (1, x, x^2)$

$\varphi : U \to V \quad \varphi(p) = p' + 2p''$ (p' první derivace polynomu, p'' druhá derivace)

Spočítáme $(\varphi)_{\beta,\alpha}$ podle definice

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left(\left((1)' + 2(1)''\right)_\beta \ \left((x)' + 2(x)''\right)_\beta \ \left((x^2)' + 2(x^2)''\right)_\beta \ \left((x^3)' + 2(x^3)''\right)_\beta \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ neboť}$$

$\varphi(1) = 0 = \underline{0} \cdot 1 + \underline{0} \cdot x + \underline{0} \cdot x^2$ 1. sloupec

$\varphi(x) = 1 = \underline{1} \cdot 1 + \underline{0} \cdot x + \underline{0} \cdot x^2$ 2. sloupec

$\varphi(x^2) = 2x + 4 = \underline{4} \cdot 1 + \underline{2} \cdot x + \underline{0} \cdot x^2$ 3. sloupec

$\varphi(x^3) = 3x^2 + 12x = \underline{0} \cdot 1 + \underline{12} \cdot x + \underline{3} \cdot x^2$ 4. sloupec

<u>Věta</u> Pro matici zobrazení v bázích α a β platí a všechna $u \in U$ platí

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} (u)_\alpha$$

Důkaz: Levá i pravá strana rovnosti jsou lineární zobrazení z U do $\mathbb{K}^k$. Proto se budou rovnat, jestliže budou stejné na vektorech báze α prostoru U. Platí

$$(\varphi)_{\beta,\alpha}(u_i)_\alpha = (\varphi)_{\beta,\alpha}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{1 \text{ na } i\text{-tém místě}} = \underbrace{S_i\big((\varphi)_{\beta,\alpha}\big)}_{i\text{-tý sloupec matice}} \underbrace{=}_{\text{podle definice}} \varphi(u_i)_\beta$$

Uvědomme si, že $u_i = 0\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + \dots + 1\cdot u_i + 0\cdot u_{i+1} + \dots + 0\cdot u_n$.

Proto $(u_i)_\beta = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \leftarrow$ 1 na i-tém místě.

Grafická interpretace předchozí rovnosti:

$$u \longmapsto \varphi(u)$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[d, "(\ )_\beta"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "x \mapsto (\varphi)_{\beta\alpha}\cdot x"'] & \mathbb{K}^k
\end{tikzcd}$$

$(\varphi(u))_\beta$

$=$

$(u)_\alpha \longmapsto (\varphi)_{\beta\alpha}(u)_\alpha$

Levá strana rovnice – červená cesta $(\varphi(u))_\beta$

Pravá strana – $(\varphi)_{\beta\alpha}\cdot(u)_\alpha$

Obě cesty dávají totéž – říkáme, že diagram komutuje.

Dokončení předchozího příkladu

$U = \mathbb{R}_3[x]$, $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$; $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\beta = (1, x, x^2)$

$$\varphi(p) = p' + 2p'' \qquad (\varphi)_{\mathcal{B},\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ověříme tvrzení předchozí věty na polynomu

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1 \in \mathbb{R}_3[x]$$

$$\varphi(p) = 6x^2 - 2x + 5 + 2(12x - 2) = 1 + 22x + 6x^2$$

$$(\varphi(p))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (p)_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\mathcal{B},\alpha} \cdot (p)_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že rovnost

$$(\varphi(p))_{\mathcal{B}} = (\varphi)_{\mathcal{B},\alpha} \cdot (p)_\alpha$$

platí.