8. přednáška   Matice lin. zobrazení
matice přechodu

$\varphi : U \to V$ lin. zobrazení
α báze v U $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$
β báze ve V $\beta = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$

Matice φ v bázích α, β

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta \; (\varphi(u_2))_\beta \; \ldots \; (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

typu $k \times n$. Platí

$$\forall u \in U \qquad (\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Speciální případ : $id : U \to U$ $id(u) = u$
lineární
V U vezmeme dvě báze $\alpha = (u_1, \ldots, u_n)$
$\beta = (v_1, \ldots, v_n)$

$$\boxed{(id)_{\beta,\alpha}} = \left((u_1)_\beta \; (u_2)_\beta \; \ldots \; (u_n)_\beta \right)$$

$$\forall u \in U \qquad (u)_\beta = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

Matice $(id)_{\beta,\alpha}$ se nazývá matice přechodu mezi bázemi α a β.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Příklad: $U = \mathbb{R}^3$, stand. báze $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$

$$\alpha = \left(u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \right)$$

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \left((u_1)_\varepsilon \; (u_2)_\varepsilon \; (u_3)_\varepsilon \right) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left((e_1)_\alpha \; (e_2)_\alpha \; (e_3)_\alpha \right)$$

$$= \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$e_1 = \underline{a_{11}} u_1 + \underline{a_{21}} u_2 + \underline{a_{31}} u_3$ řešení je $\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$

$e_2 = \underline{a_{12}} u_1 + \underline{a_{22}} u_2 + \underline{a_{32}} u_3$ řešení je $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$e_3 = \underline{a_{13}} u_1 + \underline{a_{23}} u_2 + \underline{a_{33}} u_3$ řešení je $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Počítání s maticemi zobrazení a přechodu

Věta 1: Nechť $\varphi: U \to V$, $\psi: V \to W$ jsou lineární zobrazení, α, β, γ jsou postupně báze prostorů U, V, W. Potom platí

$$(\psi \circ \varphi)_{\gamma,\alpha} = (\psi)_{\gamma,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "(\ )_\alpha"'] & V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\ )_\beta"] & W \arrow[d, "(\ )_\chi"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^k \arrow[r] & \mathbb{K}^l \end{tikzcd}$$

Důkaz: $\forall u \in U$

$$\big((\psi \circ \varphi)(u)\big)_\chi =$$

$$= \underline{(\psi \circ \varphi)_{\chi,\alpha} \cdot (u)_\alpha}$$

Současně

$$\big((\psi \circ \varphi)(u)\big)_\chi = \big(\psi(\varphi(u))\big)_\chi = (\psi)_{\chi,\beta} \cdot (\varphi(u))_\beta =$$

$$= \underline{(\psi)_{\chi,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha}$$

Platí rovnost podtržených výrazů pro všechny vektory u. Proto

$$(\psi \circ \varphi)_{\chi,\alpha} = (\psi)_{\chi,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

Věta 2

(a) $id : U \to U$ a báze α v U

$$(id)_{\alpha,\alpha} = E$$

(b) $\varphi : U \to V$ lineární izomorfismus, α báze v U, β báze ve V. Potom

$$\underbrace{(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}}_{\text{matice inv. zobr}} = \underbrace{\big((\varphi)_{\beta,\alpha}\big)^{-1}}_{\text{inverze matice zobrazení}}$$

Dk: (a) $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$

$$(id)_{\alpha,\alpha} = \left((u_1)_\alpha \ (u_2)_\alpha \dots (u_n)_\alpha \right)$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

$u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n$

(b) Dokážeme pomocí věty 1 a (a)

$$id_U = \varphi^{-1} \circ \varphi \quad : U \to U$$

věta 1: $$(id)_{\alpha,\alpha} = (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$
$$E = (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha}$$

$$id_V = \varphi \circ \varphi^{-1} \quad : V \to V$$
$$(id_V)_{\beta,\beta} = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}$$
$$E = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}$$

Proto $(\varphi^{-1})_{\alpha,\beta}$ je inverzní k $(\varphi)_{\beta,\alpha}$.

Vraťme se k příkladu $U = V = \mathbb{R}^3$
$id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bijekce

inverzní zobrazení je opět $id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
Podle věty 2 je

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left((id)_{\varepsilon,\alpha}\right)^{-1}$$

Spočítali jsme

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ dalo hodně práce

$$(id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$ lehké

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = \left((id)_{\varepsilon,\alpha}\right)^{-1}$$

Skutečně tomu tak je.

Věta 3: Matice lin. zobrazení v různých bázích

Nechť U je vekt. prostor s bázemi $\alpha, \bar{\alpha}$ a V je vekt. prostor s bázemi β a $\bar{\beta}$. Nechť

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

je lineární. Pak

$$(\varphi)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}} = (id_V)_{\bar{\beta},\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id_U)_{\alpha,\bar{\alpha}}$$

Dk:

$$\begin{tikzcd} \underset{\bar{\alpha}}{U} \arrow[r, "id_U"] \arrow[rrr, bend right, "\varphi"'] & \underset{\alpha}{U} \arrow[r, "\varphi"] & \underset{\beta}{V} \arrow[r, "id_V"] & \underset{\bar{\beta}}{V} \end{tikzcd}$$

Podle věty o matici složeného zobrazení:

$$(id_V \circ \varphi \circ id_U)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}} = (id_V)_{\bar{\beta},\beta} \cdot (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (id_U)_{\alpha,\bar{\alpha}}$$

$$\parallel$$

$$(\varphi)_{\bar{\beta},\bar{\alpha}}$$

DETERMINANTY

Každé čtvercové matici $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ lze přiřadit číslo z $\mathbb{K}$ a toto číslo nazýváme determinant matice A a značíme

$$\det A \quad \text{nebo} \quad |A|$$

Uvedu definici determinantu na základě jeho vlastností.

$$\det A = \text{výraz}\ (a_{ij}).$$

Značení:

A matice $n\times n$ má řádky $r_1(A), r_2(A), \dots, r_n(A)$

$$A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} \qquad r_i(A) \in \mathbb{K}^n$$

Obdobně sloupce matice A ... $s_1(A), s_2(A), \dots, s_n(A)$

$$A = \left(s_1(A) \;\; s_2(A) \;\; \ldots \;\; s_n(A)\right)$$

Opět

e_i buď řádek $(0\,0 \ldots 0\,1\,0 \ldots 0)$ i-té místo

nebo sloupec $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E = (e_1 \, e_2 \ldots e_n) \qquad E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Definice determinantu pomocí vlastností

Existuje právě jedno zobrazení

$$\det : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},$$

které má následující vlastnosti:

(1) $$\det E = 1$$

(2) Jestliže matice B vznikne z matice A vynásobením i-tého řádku číslem c, pak

$$\det B = c \cdot \det A$$

(3) Jestliže matice B vznikne z matice A přehozením i-tého a j-tého řádku $(i \neq j)$, pak

$$\det B = -\det A.$$

(4) Mějme matice A a B, které mají stejné řádky s výjimkou i-tého. Nechť matice C

má stejné řádky jako A i B s výjimkou i-tého a i-tý řádek C je

$$r_i(C) = r_i(A) + r_i(B).$$

Potom

$$\det C = \det A + \det B.$$

(Pozor $C \neq A+B$! Neplatí $\det(A+B) = \det A + \det B$!)

(5) Je-li A^T transponovaná k matici A, pak

$$\det A^T = \det A.$$

Důsledky definice:

Pro matice 1×1 platí $\det(a) = a$.

To plyne z (1) $\det 1 = 1$

a z (2) $\det(c\cdot 1) = c \det 1 = c$.

(a) Nechť matice A má nulový řádek. Pak

$$\det A = 0.$$

Dk: Jestliže nulový řádek vynásobíme číslem 0, dostaneme opět matici A. Podle (2)

$$\det A = 0 \cdot \det A = 0.$$

(b) Jestliže matice A má 2 stejné řádky, pak

$$\det A = 0.$$

Dk: Jestliže v matici A přehodíme stejné řádky, dostaneme zase matici A. Podle (3)

$$\det A = -\det A$$

$$2 \det A = 0 \Rightarrow \det A = 0.$$

(c) Jestliže matice B vznikne z A tak, že k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku $(i \neq j)$, pak

$$\det B = \det A.$$

Dk: Řádek $r_i(B) = r_i(A) + c\, r_j(A)$

Podle (4)

$$\det B = \det \begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ c\, r_j(A) \\ r_j(A) \\ r_n(A) \end{pmatrix}$$

$$= \det A + c \det \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_j(A) \\ \vdots \\ r_j(A) \\ r_n(A) \end{pmatrix}$$

stejné řádky

$$= \det A + c \cdot 0 = \det A.$$

(d)
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ 0 & & & \ddots \; a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Dk: Podle (2). Matice $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ vznikla

z jednotkové matice vynásobením 1. řádku číslem a_{11}, 2. řádku číslem a_{22}, atd. pak

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} \det E \,.$$
$$= a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

(e) Determinant horní trojúhelníkové matice

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\, 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

Totéž platí pro dolní trojúhelníkovou matici.

Dk: Při element. řádk. úpravách typu k i-tému řádku přičteme c-násobek j-tého řádku se determinant nemění (viz (c))

- Součin $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = 0$, tedy jedno z čísel je nulové. Pak lze horní Δ matici upravit pomocí výše uvedených řádk. úprav na schod. tvar, který má poslední řádek nulový.

$$\begin{pmatrix} \bullet & & & & \\ & \bullet & & & \\ & & 0 & \bullet & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy det této matice ve schod. tvaru je 0 a tudíž i det původní matice je 0.

- $a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn} \neq 0$. Pak lze pomocí úplné Gauss. eliminace (pouze řádk. operacemi výše uvedeného typu) dostat matici diagonální

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{n-1\,n-1} \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

det této matice je $a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$, a tedy i det původní matice je
$a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$.

(f) Důsledek pravidla (5) $\det A^T = \det A$.

Všechna pravidla pro výpočet determinantu při pouze řádk. úpravách platí stejně pro sloupcové úpravy.

Speciální případy

$\boxed{n = 2}$ $\quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Důkaz:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11}e_1 + a_{12}e_2 \\ a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \end{pmatrix} \overset{\text{použijeme pravidla}}{=}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11}e_1 \\ a_{21}e_1+a_{22}e_2 \end{pmatrix} \overset{(4)}{+} \det\begin{pmatrix} a_{12}e_2 \\ a_{21}e_1+a_{22}e_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(4)}{\underset{2\times}{=}} \det\begin{pmatrix} a_{11}e_1 \\ a_{21}e_1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11}e_1 \\ a_{22}e_2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{12}e_2 \\ a_{21}e_1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{12}e_2 \\ a_{22}e_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} a_{11}a_{21}\underbrace{\det\begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}}_{0} + a_{11}a_{22}\det\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}_{=\det E=1} + a_{12}a_{21}\det\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

[illegible]

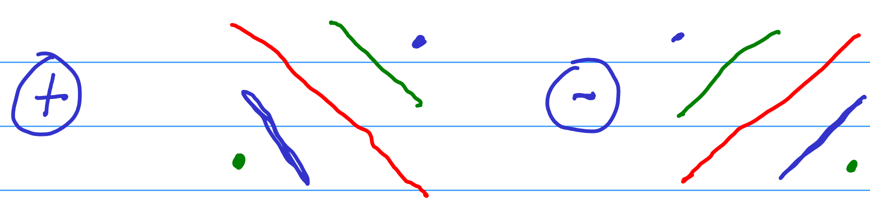
$$+ a_{12}a_{22}\underbrace{\det\begin{pmatrix} e_2 \\ e_2 \end{pmatrix}}_{0} \overset{(b)}{=} a_{11}a_{22}\cdot 1 + a_{12}a_{21}\det\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\underbrace{\det\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}}_{\det E = 1} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$\boxed{n=3}$ Mohli bychom dělat totéž, co v případě $n=2$, ale bylo by to komplikovanější. Napíšeme výsledek

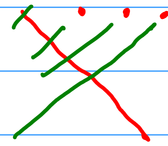
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$6 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1$ výrazů



Sarrusovo pravidlo

Pozor pro $n=4$ NIC TAKOVÉHO NEPLATÍ



„Saarusovo pravidlo" dává 6 výrazů

ve skutečnosti je potřeba
$4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$ výrazů

Obecně pro n je potřeba $n!$ výrazů.

Obecná strategie výpočtu determinantu matic $n\times n$, kde $n \geq 4$ je:

Pomocí řádk. a sloup. úprav převedeme matici na horní nebo dolní trojúhelníkovou. U ní umíme det spočítat. Rovněž víme, jak se det mění při úpravách.

Ukážeme na příkladu matice $n\times n$

$$\det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix} =$$

K 1. řádku přičtu ostatní řádky

$$= \det\begin{pmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & \dots & a+n-1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix}$$

$$= (a+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & & a \end{pmatrix} =$$

$=$ Od 2., 3., 4., ... n-tého řádku odečteme 1. řádek

horní Δ

$$= (a+n-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & a-1 \end{pmatrix}$$

$$= (a+n-1)\ 1\cdot(a-1)\cdot(a-1)\cdots(a-1)$$

$$= (a+n-1)(a-1)^{n-1}$$