M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

- Jde o seznam typových úloh, které se probírají na cvičení a dalších obdobných úloh na procvičení za domácí úlohu. Na písemkách se objeví výhradně modifikace příkladů z této sbírky a jim obdobné příklady.
- Příklady označené hvězdičkou jsou určeny pro studenty, kteří by se na cvičení příliš nudili a jsou zde uvedeny pouze jako doplňující příklady, které nebudou obsahem písemek.
- Program jednotlivých cvičení si sestavují vyučující sami a mohou se lišit i v rámci jednotlivých cvičení jednoho vyučujícího.
- Velké množství příkladů je převzato ze sbírky „Seminář ze středoškolské matematiky“ autorů Herman, Kučera, Šimša (skriptum MU, 2004). Dalšími příklady přispěli doc. Čadek, dr. Kruml (oba v roce 2019), doc. Šilhan (2020) a doc. Klíma (2019-2020).

Aktuální verze sbírky ze dne 22. listopadu 2021.

1 Úvodní hodina - zápis množin

Cvičení konaná 14. a 15. 9. 2021.

Příklad 1.1: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech přirozených čísel, která jsou dělitená třemi.
2. Množinu všech celých čísel, která dávají po dělení osmi zbytek 5.
3. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je větší než 3.
4. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je menší než jejich trojnásobek.
5. Množinu všech dvojic reálných čísel, kde první je trojnásobkem druhého.
6. Množinu všech dvojic kladných reálných čísel, kde první je větší než trojnásobek druhého.
7. Množinu všech trojic přirozených čísel, která mohou být délkami stran pravoúhlého trojúhelníka. Je tato množina prázdná?

Příklad 1.2: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech lichých přirozených čísel, která jsou dělitená 5.
2. Množinu všech dvouciferných celých čísel, která jsou dělitená 17.
3. Množinu všech reálných čísel x, která jsou řešením nerovnice $x^2 + 2x + 1 > 0$.
4. Množinu všech kladných reálných čísel, jejichž třetí mocnina je menší než jejich druhá mocnina.
5. Množinu všech dvojic přirozených čísel, kde první dělí druhé.
6. Množinu všech dvojic celých čísel, která se navzájem dělí, tj. první dělí druhé a naopak.
7. Množinu všech čtveřic celých čísel, kde třetí je součtem prvních dvou a čtvrté je součinem prvních tří.

Příklad 1.3: Napište formální definice:

1. Celé číslo a je sudé.
2. Celé číslo a je liché.
3. Celé číslo a je dělitelné třemi.
4. Celé číslo a není dělitelné třemi.
5. Celé číslo a je dělitelné číslem b.

Příklad 1.4: Dokažte platnost následujících tvrzení pro libovolná celá čísla a a b.

1. Z čísel a, b a $a + b$ je aspoň jedno sudé.
2. Pokud je $a + b$ sudé, pak $a - b$ je sudé.
3. Číslo $a + b$ je sudé právě tehdy, když je sudé číslo $a - b$.
4. Pokud je $a + b$ sudé, pak $a^2 + b^2$ je také sudé.
5. Pokud je $a + b$ liché, pak $a^2 + b^2$ je také liché.
6. Číslo $a^2 + a$ je sudé číslo.
7. Číslo $a^3 - a$ je dělitelné 3.
8. Číslo $a^4 - a^2$ je dělitelné 4.

Příklad 1.5: Nechť a, b, c, d jsou různá jednociferná kladná celá čísla taková, že 3 dělí $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Dokažte, že potom $a^2 + b^2$ není dělitelné 3.

Příklad 1.6: V následujících příkladech zapište množinu M bodů v rovině, a pak určete výčtem prvků množinu všech dvojic celých čísel x a y takových, že $[x, y] \in M$.

1. M je obdélník, jehož tři vrcholy jsou $[-2, -2]$, $[-2, 0]$ a $[1, -2]$.
2. M je trojúhelník ABC, kde $A = [3, 2]$, $B = [1, -2]$ a $C = [-1, 1]$.
3. M je množina bodů $[x, y]$ v kruhu se středem $(8, 3)$ a poloměrem 4, pro které navíc platí $x \leq y$.
4. M je průnik trojúhelníku, jehož vrcholy jsou počátek $[0, 0]$ a body $[0, 4]$ a $[4, 0]$, s množinou všech bodů $[x, y]$, pro které platí $(x - y - 2)^2 = 9$.
5. M je tvořena body (x, y) rovnoběžníku, jehož tři vrcholy jsou $[0, 0]$, $[-6, 0]$ a $[4, 3]$, které zároveň leží pod přímkou $y = x + 1$.

Pozn.: Body obdélníku, trojúhelníku atd. míníme body, které jsou buď „uvnitř“ nebo „na hranici“ tohoto útvaru. Rozmyslete si, jak by se řešení lišilo v případě, kdybychom uvažovali pouze „vnitřní“ body.

Příklad 1.7: Nechť M je množina bodů v rovině, které jsou uvnitř (tj. nikoli na stranách) čtverce se středem v bodě $[4, 3]$, stranou délky 2, jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné s osami x a y. Napište množinu M formálně (tj. body roviny o souřadnicích, které splňují vhodné nerovnosti). Určete dále všechny body s celočíselnými souřadnicemi, které množina M obsahuje.

2 Vyhodnocení vstupního testu

Cvičení konaná 21. a 22. 9. 2021.

Příklad 2.1: Nechť $T = [r, s]$ je těžiště $\triangle ABC$, kde $A = [2, -1]$, $B = [-1, 3]$ a $C = [5, 7]$. Určete hodnoty r a s.

Příklad 2.2: Nechť $S = 72\,cm^2$ je povrch krychle vepsané do kulové plochy o poloměru r. Určete hodnotu r.

Příklad 2.3: Nechť M je množina všech reálných čísel, která splňují nerovnici $|2x+1| < x+3$. Určete množinu M.

Příklad 2.4: Komplexní číslo z je řešením rovnice $z + |z| = 5 + (2+i)^2$. Určete komplexní číslo z^2.

Příklad 2.5: Čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jsou řešením rovnice $x^{2\log x + 3{,}5} = 100\sqrt{x}$. Určete číslo $k = ab^2$.

Příklad 2.6: Nechť číslo c je součtem všech řešení rovnice $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ v intervalu $[0, 2\pi]$. Určete hodnotu c.

Příklad 2.7: Určete počet všech lichých pěticiferných přirozených čísel, která neobsahují ve svém zápisu cifru 9.

Příklad 2.8: Nechť $c = a^2 + b^2$, kde a a b jsou délky poloos kuželosečky k o rovnici $k\ : 3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$. Určete hodnotu c.

Příklad 2.9: Definujte, co je to aritmetický průměr n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a co je medián těchto čísel. Na příkladech čtyř čísel ukažte, že někdy je medián menší než aritmetický průměr a jindy je tomu naopak.

Příklad 2.10: Pro n-tici kladných reálných čísel se definují kromě aritmetického průměru i jiné průměry. Nejznámější je geometrický a harmonický průměr:

$$\begin{aligned} G(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}, \\ H(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \end{aligned}$$

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a_1, a_2 platí $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$. Pro která a_1, a_2 nastane rovnost? (A značí aritmetický průměr čísel v závorce.)

Příklad 2.11*: Jaká je průměrná rychlost auta, které jede n stejně dlouhých úseků postupně rychlostmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$?

Příklad 2.12*: Nerovnosti z příkladu 2.10 platí nejen pro dvojice, ale pro všechny n-tice kladných reálných čísel. Dokažte, že z nerovnosti $A \geq G$ plyne nerovnost $G \geq H$. Zkuste dokázat nerovnost $A \geq G$.

3 Reálné funkce a jejich grafy

Cvičení konaná 29. 9. 2021.

Zopakujte si, co je zobrazení množiny A do množiny B. O zobrazení do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme mluvit jako o funkci.

Příklad 3.1: Určete definiční obor a obor hodnot zadaných funkcí. Dále načrtněte graf a rozhodněte, zda je funkce injektivní, surjektivní (zobrazení ze svého definičního oboru) a zda je rostoucí, resp. klesající.

1. $f(x) = 2x + 7$,
2. $f(x) = |3x + 1| - x$,
3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$,
4. $f(x) = x^2 + 2x + 3$,
5. $f(x) = \log_{10}(x + 2)$,
6. $f(x) = 2^{x-3}$,
7. $f(x) = (x - 1)^2 + (x + 2)^2$,
8. $f(x) = 3 \cos x$,
9. $f(x) = \tan(-x)$.

Příklad 3.2: Funkce f je dána následujícím předpisem

$$f(x) = \frac{1}{\log_{10}(x^2 - 1) - 1} .$$

Najděte její definiční obor jako podmnožinu reálných čísel. Najděte její obor hodnot.

Příklad 3.3: Zkoumejte, jak se mění graf funkce $y = f(x)$, když přejdeme k funkci:

1. $y = 2f(x)$,
2. $y = \frac{1}{3} \cdot f(x)$,
3. $y = -f(x)$,
4. $y = f(-x)$,

5. $y = f(x+3)$,
6. $y = f(x-2)$,
7. $y = f(x) - 4$,
8. $y = f(x) + 6$,
9. $y = f(3x)$,
10. $y = f(\frac{x}{2})$.

Je-li původní funkce rostoucí na svém definičním oboru, co můžeme říci o nově vytvořených funkcích?

Příklad 3.4: S využitím úlohy 3.3 rozložte následující funkce jako složení "jednodušších" funkcí.

1. $f(x) = |3x - 8| + 2$,
2. $g(x) = \frac{3}{x+5} + 2$,
3. $h(x) = \log_{10}(2x + 3) - 5$.

Nakreslete grafy těchto funkcí. Rozhodněte, zda jsou funkce rostoucí, resp. klesající, případně dejte příklad vhodných intervalů, na kterých je funkce rostoucí, resp. klesající.

Příklad 3.5: Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$ a oborem hodnot $H(f) = (0, \pi/2)$ a předpokládejme, že $f(x)$ je klesající na celém definičním oboru.

a) Dokažte, že pak funkce $\cos(f(x))$ je rostoucí na celém definičním oboru.
b) Rozhodněte o chování funkce $g(x) = \frac{\cos(x-\pi/2)}{f(x)}$ na intervalu $(0, \pi/2)$. Možné odpovědi jsou, že funkce $g(x)$ je na tomto intervalu buď rostoucí nebo klesající nebo se takto chová jen na části daného intervalu nebo monotonie závisí na volbě funkce $f(x)$. Odpověď je vždy třeba dokázat.

4 Maximální intervaly monotonie funkcí

Cvičení konaná 5. a 6. 10. 2021.

Příklad 4.1:

1. Definujte (formálně) pojem „funkce f je rostoucí na intervalu I“.
2. Definujte formálně „maximální interval, kde je funkce f rostoucí“.

3. U funkcí z příkladů 3.1, 3.2 a 3.4 zjistěte, na kterých maximálních intervalech jsou rostoucí, resp. klesající.

4. Zformulujte precizně tvrzení, že složení rostoucích funkcí (na intervalu) je rostoucí funkce (na intervalu) a větu dokažte. Zejména si uvědomte, jaké všechny předpoklady je třeba uvést. Přesněji: pokud g je rostoucí funkce na intervalu I, kde $I \subseteq D(g)$, a dále f je rostoucí funkce na intervalu $J \subseteq D(f)$, potom ještě musíme něco předpokládat o množině $\{g(x); x \in I\}$, abychom mohli dokázat, že $f \circ g$ je rostoucí na intevalu I.

Příklad 4.2: Nakreslete graf funkce

$$f(x) = 2\cos(3x + \frac{\pi}{2}) - 1.$$

Určete všechny maximální intervaly, na nichž je funkce klesající (resp. rostoucí). Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$. Určete zejména, kolik je takových reálných čísel v intervalu $(0, 2\pi)$.

Příklad 4.3: Mějme funkci

$$f(x) = \frac{1}{|e^{2x-1} - 1|}.$$

Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete, na kterých maximálních intervalech je tato funkce rostoucí nebo klesající.

Příklad 4.4: Nechť f a g jsou rostoucí funkce na intervalu I, tj. zejména $I \subseteq D(f) \cap D(g)$. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = f(x) + g(x)$,
2. $h(x) = f(x) - g(x)$,
3. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$,
4. $h(x) = -g(x)$,
5. $h(x) = g(x) \cdot g(x)$,
6. $h(x) = |g(x)|$,
7. $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

V případech, kdy odpovídáte „ano“, se pokuste o formální důkaz. V případech, kdy odpovídáte „ne“, dejte protipříklad a navíc se pokuste (přidáním vhodných předpokladů pro funkce f a g) zformulovat platné tvrzení.

Příklad 4.5: Nechť g je rostoucí funkce na intervalu I, tj. zejména $I \subseteq D(g)$ a nechť $c \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené reálné číslo. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = g(x) + c$,
2. $h(x) = c - g(x)$,
3. $h(x) = c \cdot g(x)$.

Pozor, odpověď se může lišit v závislosti na paramatru c.

Příklad 4.6: Udejte příklad rostoucích funkcí f a g s definičním oborem $\mathbb{R}$ takových, že funkce h, daná předpisem $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, je klesající funkce na celém definičním oboru $D(h) = \mathbb{R}$.

Nápověda: Pokuste se nejdříve načrtnout grafy vašich funkcí f, g a h. Poté se pokuste vymyslet nějaký vhodný předpis pro tyto funkce (jako složení elementárních funkcí).

Příklad 4.7: Nechť f je rostoucí funkce na celém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$ s oborem hodnot $H(f) = (0, \infty)$. Uvažujme dále funkci g danou předpisem $g(x) = x \cdot f(x)$. Dokažte, že funkce g je rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$.

V důkazu identifikujte krok, kde se využije předpoklad $H(f) = (0, \infty)$, a dále krok, kde se využije předpoklad, že I obsahuje pouze kladná reálná čísla.

Ukažte, že oba tyto předpoklady jsou nutné. Zejména dejte příklad rostoucí funkce f s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$, takové, že $H(f)$ obsahuje 0 nebo záporné číslo, pro niž funkce $g(x) = x \cdot f(x)$ není rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$. Poté zformulujte podobně tvrzení o existenci funkce f v druhém případě a dejte vhodný příklad takové funkce.

5 Kvadratické funkce

Cvičení konaná 12. a 13. 10. 2021.

Příklad 5.1: Pomocí úpravy na čtverec odvoďte “vzoreček” pro řešení obecné kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Načrtněte graf kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ pro $a > 0$ a pro $a < 0$. Určete, jaké maximum nebo minimum tato funkce nabývá a v kterém bodě.

Příklad 5.2: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby daná nerovnost platila pro všechna $x \in A$. (Kreslete si, jak musí vypadat grafy příslušných kvadratických funkcí.)

a) $(r+4)x^2 - 2rx + 2r - 6 < 0$, $A = \mathbb{R}$.

b) $rx^2 - 4x + 3r + 1 > 0$, $A = (0, \infty)$.

c) $(r-2)x^2 + rx + 1 - r > 0$, $A = (0, \infty)$.

d) $(x - 3r)(x - r - 3) < 0$, $A = [1, 3]$.

Příklad 5.3: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost $(r-2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$, platila pro všechna $x \in [3, 5]$.

Příklad 5.4: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost

$$(rx - 1)(x + r) < 0$$

platila pro všechna $x \in A$.

a) $A = (0, 1)$.

b) $A = (-1, 1)$.

c) $A = (-2, 2)$.

d) $A = (0, \infty)$.

Příklad 5.5: Určete, kdy pro řešení $x_1 \leq x_2$ rovnice

$$2x^2 - 2(2a+1)x + a(a-1) = 0$$

platí $x_1 < a < x_2$. *Nápověda: Vyznačte na grafu příslušné kvadratické funkce její hodnotu v a.*

Příklad 5.6: Určete, kdy pro řešení x_1 a x_2 rovnice

$$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$$

platí $x_1 > 3$ a $x_2 < 2$.

Příklad 5.7: Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má následující polynom dvojnásobný kořen

$$(2a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3.$$

Příklad 5.8: Najděte nejmenší celé číslo k, pro něž má rovnice

$$x^2 - 2(k+2)x + 12 + k^2 = 0$$

dvě různá reálná řešení.

Příklad 5.9*: Nalezněte kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejímž jedním řešením je

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}.$$

Příklad 5.10*: Označme

$$a = \sqrt[3]{3\sqrt{21} + 8}, \quad b = \sqrt[3]{3\sqrt{21} - 8}\ .$$

Dokažte, že součin i rozdíl těchto dvou reálných čísel je celočíselný a určete jej. Zjednodušte algebraické výrazy pro čísla a a b tak, aby obsahovala kromě celých čísel a obvyklých operací již pouze druhé odmocniny.

Nápověda: Napište si kvadratickou rovnici s dvojicí řešení a, $-b$.

První vnitrosemestrální písemka

Písemka na obsah kapitol 1, 3, 4 a 5.

sk. A (18.10)

1. *Mějme funkci $f(x) = 3\sin(|x + \frac{\pi}{3}|)$. Určete její definiční obor, obor hodnot a načrtněte její graf. Rozhodněte, zda je funkce periodická. Určete dále všechny hodnoty x, pro které platí $f(x) = 0$.*

2. *Mějme funkci $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - 2$. Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete, na kterých maximálních intervalech je tato funkce rostoucí nebo klesající. Dále uvažujme funkci $g = f \circ f$. Určete definiční obor a obor hodnot funkce g.*

3. *Mějme funkci $f(x) = \frac{e^{x^3}}{-\ln x}$. Rozhodněte o monotonii této funkce na intervalu $(0, 1)$.*

Nápověda: Příklad není určený na výpočet pomocí derivací (i takový postup vyžaduje ověřování platnosti jistých nerovností, takže je srovnatelně obtížný). Zadanou funkci $f(x)$ lze chápat jako součin dvou jednodušších funkcí na daném intervalu, který je také podstatný pro správnou odpověď.

4. *Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost $(r-1)x^2 + 2rx + r > 0$ platila pro všechna $x \in [-2, \infty)$.*

5. *Nechť a, b, c jsou celá čísla taková, že čísla $a+b$, $a+c$ a $b+c$ dávají stejný zbytek po dělení 3. Dokažte, že číslo $a+b+c$ je dělitelné 3.*

sk. B (22.10)

1. *Mějme funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}-1}$. Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete maximální intervaly monotonie. Dále uvažujme funkci g danou vztahem $g(x) = f(\frac{1}{x})$. Určete definiční obor a obor hodnot funkce g.*

2. *Mějme funkci $f(x) = \sin(\pi \sin x)$. Určete její definiční obor, obor hodnot, určete maximální interval monotonie I_1 obsahující $x = 0$ a také najděte nějaký maximální interval I_2, kde je funkce $f(x)$ klesající. Dále určete všechna x taková, že $f(x) = 0$.*

3. *Mějme funkci $f(x) = e^{|x-3|}(-x^2 + 6x - 10)$. Rozhodněte o monotonii této funkce na intervalu $[0, 3]$.*

4. *Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost $(r+3)x^2 - 2rx + 2 > 0$ platila pro všechna $x \in [0, 2]$.*

5. *Nechť a, b jsou celá čísla. Dokažte, že alespoň jedno z čísel $a+b$, $2ab$, $a-b$ je dělitelné 4.*

6 Funkce s absolutní hodnotou, racionální kořeny celočíselných polynomů

Cvičení konaná 19. a 20.10. 2021.

Příklad 6.1: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) = |2x-3| - |x+2| + |10-3x| - 1\,.$$

1. Nakreslete graf funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na intervalu $[-5, 5]$.
2. Najděte obor hodnot funkce f.
3. Určete maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní.
4. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) < 2$.

Příklad 6.2: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice

1. $|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = |x+2|$,
2. $$\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} = 1$$
3. $|x^2-4x-5| - 3 = x^2 + |x-4|$.

Příklad 6.3: Uvažujme dvě funkce $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisy

$$f(x) = \big|\, |x+1| + |x-1| \,\big|, \qquad g(x) = \big|\, |x+1| - |x-1| \,\big|.$$

1. Načrtněte grafy funkcí f a g.
2. Najděte obor hodnot těchto funkcí.
3. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f rostoucí, resp. klesající.
4. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce g rostoucí, resp. klesající.
5. Určete všechna řešení nerovnice $g(x) < f(x)$, tj.

$$\big|\, |x+1| - |x-1| \,\big| \; < \; \big|\, |x+1| + |x-1| \,\big|.$$

Příklad 6.4*: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\left| x + \frac{1}{x+1} \right| \geq 1.$$

Příklad 6.5: Najděte nějaký polynom s celočíselnými koeficienty,

1. jehož kořeny jsou $0, 1, -1/2$,
2. jehož jediný reálný kořen je -1, ale stupeň polynomu je větší než 1,
3. který má trojnásobný kořen 1,
4. jehož kořeny jsou $\sqrt{2}$, -1 a případně další reálná čísla.

Příklad 6.6: Dokažte kritérium pro racionální kořeny polynomů s celočíselnými koeficienty: Pokud zlomek ve zkráceném tvaru $\frac{p}{q}$ je kořenem polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ s celočíselnými koeficienty, potom $p \mid a_0$ a $q \mid a_n$.

Příklad 6.7: Najděte všechny racionální kořeny polynomu:

1. $2x^3 + x^2 - 4x - 3$,
2. $27x^3 + 27x^2 - 4$,
3. $4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 7x - 2$.

Příklad 6.8: Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby obě rovnice měly aspoň jedno společné řešení.

$$x^2 + ax + 8 = 0, \quad x^2 + x + a = 0.$$

Příklad 6.9: Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby obě rovnice měly aspoň jedno společné řešení.

$$(1 - 2a)x^2 - 6ax - 1 = 0, \quad ax^2 - x + 1 = 0.$$

Příklad 6.10: Určete všechny parametry $a \in \mathbb{R}$ takové, že má následující dvojice rovnic nějaké společné reálné řešení:

$$ax^2 + x + a = 0, \quad x^2 + ax + a = 0.$$

7 Příklady s odmocninami, Vietovy vztahy

Cvičení konaná 26.10. a 27.10. 2021.

Příklad 7.1: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$,
2. $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$,
3. $\sqrt{3x+2} = \sqrt{5x+3} + 2\sqrt{2x+1}$.

Příklad 7.2: Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

1. $3 > x + 3 \cdot \sqrt{1 - x^2}$,
2. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$,
3. $1 \geq x + \sqrt{4 - x^2}$.
4. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} > \sqrt{x+4} - \sqrt{x+2}$
5. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-3}$.

Příklad 7.3: Označme x_1, x_2 řešení rovnice $3x^2+8x+4 = 0$. Aniž danou rovnici řešíte, určete číslo:

1. $x_1^2 + x_2^2$,
2. $x_1^3 + x_2^3$,
3. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$,
4. $x_1 - x_2$,
5. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$,
6. $x_1^2 - x_2^2$.

Příklad 7.4: Označme x_1, x_2, x_3 řešení rovnice $x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = 0$. Aniž danou rovnici řešíte, určete číslo:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

2.* $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$,

3. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$,
4. $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$,
5. $x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$.

Příklad 7.5*: Nechť polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ má tři kladné kořeny. Dokažte, že $a^3 \leq 27c$.

8 Exponenciální a logarimické funkce

Cvičení konaná 2. a 3. 11. 2021.

Příklad 8.1: Mocniny a exponenciální funkce a^x.

1. Pro $a > 0$ a $n \in \mathbb{Z}$ definujte a^n.
2. Je-li $a > 1$ reálné číslo a $n < m$ celá čísla, pak $a^n < a^m$. Dokažte.
3. Pro $a > 0$ reálné a $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ definujte a^x.

4.* Pro $a > 0$ reálné a x, y racionální, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.

5. Pro $a > 1$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme $a^x = \sup\{a^y \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{Q}, y \leq x\}$. Udělejte totéž pro $a \in (0, 1)$.

6.* Dokažte, že funkce a^x je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a \in (0, 1)$.

7.* Pro $a > 0$ reálné a x, y reálná, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.

8. Nakreslete graf exponenciální funkce pro různá a.

Příklad 8.2: Logaritmická funkce $\log_a x$.

1. Definujte inverzní funkci k funkci f.
2. Definujte $\log_a x$ jako inverzní funkci k exponenciální funkci a^x.
3. Jak je to s monotonií logaritmické funkce? Nakreslete grafy logaritmické funkce pro různé základy.

Příklad 8.3: Z vlastností exponenciálních funkcí dokažte tyto vlastnosti logaritmických funkcí:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
3. $\log_a(x^y) = y \log_a x$.
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
6. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.
7. $\log_{a^y} x^y = \log_a x$.

Doplňte vždy chybějící předpoklady na použité parametry a, b, c, x, y.

Příklad 8.4: Určete

1. $49^{1-\frac{1}{2}\log_7 25}$.
2. $\log\left(\log\sqrt{\sqrt[5]{10}}\right)$.
3. $81^{\frac{1}{\log_5 3}}$.
4. $\log_2 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$.
5. $3^{2\log_3 2 + \log_3 5}$.
6. $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_4 9} - \frac{1}{\log_8 3}$.
7. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 3^{\log_9 36}$.

9 Exponenciální a logarimické funkce – dokončení

Cvičení konaná 9. a 10. 11. 2021.

Příklad 9.1: Pomocí čísel a, b, c vyjádřete x:

1. $x = \log_{100} 40; \quad a = \log_2 5.$
2. $x = \log_6 16; \quad a = \log_{12} 27.$
3. $x = \log \frac{1}{300}; \quad a = \log 2,\ b = \log 3,\ c = \log 5.$
4. $x = \log_{140} 63; \quad a = \log_2 3,\ b = \log_3 5,\ c = \log_7 2.$

Příklad 9.2: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $4^x + 2^{x+1} = 24.$
2. $|x|^{x^2-2x} = 1.$
3. $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0.$
4. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x.$

Příklad 9.3: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $\log 5 + \log(x+10) = 1 - \log(2x-1) + \log(21x-20)$.
2. $\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$.
3. $15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5(9x)} = 1$.
4. $\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = \log\sqrt{1-x^2} + 2$.

Příklad 9.4: Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

1. $\frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$.
2. $8^x + 18^x - 2\cdot 27^x > 0$.
3. $\log_{(x-2)}(2x-3) > \log_{(x-2)}(24-6x)$.
4. $x^{\log_2 x} > 2$.

Příklad 9.5: a) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\log_3 x^2 \cdot \log_9 x = 3$.
b) Využijte předchozí výsledek a vyřešte rovnici $\log_3(|z|+1)^2 \cdot \log_9(|z|+1) = 3$.

Druhá vnitrosemestrální písemka

Psaná dne 18.11.2021 na obsah kapitol 6-9.

1. *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici* $4 + 2x - x^2 = |x-1| + |x+2|$.
2. *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici* $\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2} > 1$.
3. *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici* $8^x + 2 = 4^x + 2^{x+1}$.
4. *Určete všechna řešení nerovnice* $\log_{x+1}(2x+1) > 2 + \log_{x+1}(\frac{3x-1}{x+1})$.
5. *Uvažujme funkci f danou předpisem* $f(x) = \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x$.
a) Určete definiční obor funkce a zdůvodněte, že funkce je na něm rostoucí.
b) Pro libovolné $n \in \mathbb{R}$ vypočtěte $f(4^n)$. [Výsledek zapište jako polynom v proměnné $n \in \mathbb{Z}$.]
c) Využijte předchozí výsledek a vyřešte rovnici $2\log_2 x + 2\log_4 x + 2\log_8 x + 11 = 0$.
d) Podobně vyřešte nerovnici $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < \log_{16} x^5$.

10 Goniometrické funkce

Cvičení konaná 23. a 24. 11. 2021.

Příklad 10.1: Odvoďte základní vztahy:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
2. $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,
3. $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$,
4. $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$,
5. $\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x), \quad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$.
6. $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \quad \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

Příklad 10.2*: Předpokládejme, že platí $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, kde x je libovolné reálné číslo. Dále předpokládejme, že pro umocňování reálného čísla e na komplexní čísla platí obvyklé vlastnosti pro umocňování. Odvoďte součtové vzorce

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,.$$

Součtových vzorců využijte k odvození vzorců (e) a (f) z předchozího příkladu.

Příklad 10.3: Odvoďte dále vztahy:

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
2. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,
3. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Nápověda: V částech 2. a 3. napište $x = \alpha + \beta$ a $y = \alpha - \beta$ a použijte součtové vzorce.

Příklad 10.4: Za předpokladu, že výrazy dávají smysl, dokažte následující rovnosti. Popište, pro které hodnoty tyto rovnosti platí.

1. $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$,
2. $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$,
3. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$.

Nápověda: 1) Ve vztahu $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$ použijte součtové vzorce pro $\sin(x+y)$ a $\cos(x+y)$. 2) Ve vztahu $\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$ použijte součtové vzorce pro $\sin(x-y)$ a $\cos(x-y)$. 3) Ve výrazu $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$ použijte vzorce pro $sin(\frac{\pi}{2} + x)$ a $cos(\frac{\pi}{2} + x)$.

Příklad 10.5: Odvoďte následující vztahy (a promyslete, pro které hodnoty $x \in \mathbb{R}$ platí):

1. $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,
2. $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$,
3. $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Nápověda: Ve všech případech na pravé straně použijte $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ *a následně upravte složený zlomek.*

Příklad 10.6: **a)** Za předpokladu, že výrazy na obou stranách rovnosti dávají smysl, dokažte:

$$\sin 2x = \frac{4\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x}.$$

b) Určete, pro která reálná čísla x mají výrazy smysl.

Příklad 10.7: Za předpokladu, že výrazy na obou stranách rovnosti dávají smysl, dokažte:

1. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} = 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x$,
2. $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x)$,
3. $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$,
4. $\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x} = \operatorname{tg} x$,
5. $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{1}{4}(3 + \cos^2 2x)\cos 2x$,
6. $\sin x \cos(y - x) + \cos x \sin(y - x) = \sin y$.

Nápověda: 1) Na pravé straně použijte $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$*, upravte na společný jmenovatel a použijte vztah* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$*. 2) Použijte součtový vzorec pro* $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$*, upravte složený zlomek a pak porovnejte s levou stranou. 3) Použijte součtový vzorec pro* $\operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg}(x + 2x)$*, pak znova pro* $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(x+x)$ *a upravte složený zlomek. 4) Použijte vzorce pro* $\sin(2x)$ *a* $\cos(2x)$ *a také* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$*; výsledný zlomek pak zjednodušte. 5) Použijte vztah* $a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$*. Přitom zde* $a^2 + b^2 = 1$ *a* $1 - a^2b^2 = 1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x$*. 6) Použijte součtové vzorce.*

Příklad 10.8: Vypočtěte bez kalkulačky:

1. $\cos 15°$,
2. $\operatorname{tg} 75°$,
3. $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40°$,
4. $\sin 160° \cos 110° + \sin 250° \cos 340° + \operatorname{tg} 110° \operatorname{tg} 340°$,
5. $\sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$.

Nápověda: 1) $15 = 45 - 30$. *2)* $75 = 45 + 30$. *3) použijte vztah 10.4-1 pro argumenty* $20°$ *a* $40°$. *4) použijte vztahy z příkladu 10.1 na posunutí argumentů do základního intervalu. Potom součtový vzorec na součet prvních dvou členů a vzorec z 10.4-3 na třetí sčítanec. 5) použijte poslední vzorec z 10.3-3 v opačném směru.*

Příklad 10.9*: Dokažte, že pro vnitřní úhly α, β, γ trojúhelníka platí:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}.$$

11 Inverzní funkce (geometrických funkcí)

Cvičení konaná 30.11. a 1. 12. 2021.

Příklad 11.1: Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní. Na těchto intervalech určete inverzní funkci.

1. $f(x) = x^2 + x - 6$,
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$.

Příklad 11.2: Funkce arcsin je inverzní funkce k funkci sin na intervalu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Napište předpis inverzní funkce k funkci sin na intervalu

1. $[2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$,
2. $[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}]$

pomocí funkce arcsin.

3 Navrhněte a řešte analogickou úlohu pro dvojice funkcí cos, arccos, resp. tg, arctg.

Příklad 11.3: Najděte maximální interval obsahující 0, na němž je funkce f monotónní. Na tomto intervalu určete inverzní funkci.

1. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$,
2. $f(x) = \sin x + \cos x$,
3. $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x$,
4. $f(x) = \log(\cos x)$,
5. $f(x) = \log(\log(x + 10))$.

Příklad 11.4: Funkce arccos je inverzní funkce k funkci $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Pomocí této funkce vyjádřete funkci g, která je inverzní k funkci $f(x) = 3\cos 2x - 1$ uvažované na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. (Definiční obor funkce g je tedy obor hodnot funkce f, pokud zúžíme definiční obor funkce f na interval $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.)

Příklad 11.5: Následující vztahy lze použít pro výpočet $\arccos x$ a $\arctan x$ při znalosti hodnoty $\arcsin x$. Dokažte tyto vztahy.

1. Pro libovolné $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
2. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $\arctan x = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

Nápověda: 1) Použijte vztah $\cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y) = x$ *pro* $y \in [0, \pi]$. *2) Umocněte na druhou* $x = \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y}$ *a nahraďte* $\cos^2 y$ *výrazem* $1 - \sin^2 y$. *Následně rovnost upravte rovnost do tvaru* $x^2 = (x^2 + 1)\sin^2 y$, *z níž lze hodnotu* $y = \arctan x$ *vypočítat pomocí funkce* $\arcsin x$.

12 Rovnice a nerovnice s goniometrickými funkcemi

Cvičení konaná 7. a 8. 12. 2021.

Příklad 12.1: Určete nejmenší periodu zadané funkce:

1. $f(x) = \sin x + \cos x$,
2. $f(x) = \sin 3x$,
3. $f(x) = |\cos 2x|$,
4. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,
5. $f(x) = \sin x^2$,
6. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$.

Příklad 12.2: Určete obor hodnot a nejmenší periodu následujících funkcí.
a) $f(x) = \sin(x)\sin(x+\pi)$,
b) $g(x) = |\sin(x)\sin(x+\frac{\pi}{2})|$,
c) $h(x) = \sin(x) + \sin(x+\frac{\pi}{2}) + \sin(x+\pi) + \sin(x+\frac{3\pi}{2})$.

Příklad 12.3: U dané funkce určete, zda je sudá nebo lichá.

1. $f(x) = x \cdot \sin x$,
2. $f(x) = x \cdot \cos 2x$,
3. $f(x) = x + \sin x$,
4. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,
5. $f(x) = \cos x^2$,
6. $f(x) = \sin^2 x$,
7. $f(x) = |\sin x + \cos x|$,
8. $f(x) = \sin |x|$.

Příklad 12.4: Udejte příklad funkce s vhodným definičním oborem, která má předepsané vlastnosti:

1. perioda 3π, obor hodnot $[1, 2]$,
2. perioda 1, obor hodnot $\mathbb{R}$,
3. perioda 2, obor hodnot $[0, 1] \cup (2, 3)$, rostoucí na intervalu $(0, 2)$.

Příklad 12.5: Udejte příklad funkce s definičním oborem obsahující interval I, pro niž je obor hodnot na intervalu I roven $(0, \infty)$, tzn. $f(I) = (0, \infty)$.

1. $I = (n, \infty)$, pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$,
2. $I = (-\infty, n)$, pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$,
3. $I = (0, n)$, pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$,
4. $I = (a, b)$, pro pevně zvolená $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $a < b$,

Příklad 12.6: Udejte příklad funkce s definičním oborem $\mathbb{R}$ takové, že pro libovolné kladné reálné číslo ε je obor hodnot na intervalu $(0, \varepsilon)$ roven I, tzn. $f(0, \varepsilon) = I$.

1. $I = [-1, 1]$,
2. $I = (-1, 1)$,
3. $I = [0, 1]$,
4. $I = (0, 1)$,
5. $I = (0, \infty)$.

Příklad 12.7: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice nejdříve graficky a poté i algebraickým výpočtem:

1. $\sin x = \sin 2x$,
2. $\sin 3x + \cos 3x = 0$,
3. $\sin 2x = \cos 3x$.

Nápověda: 2) V druhé části úkolu lze nahradit $\cos$ *pomocí* $\sin$ *dle vztahu 10.1-6), a potom použít 10.3-2). 3) Převeďte* $\cos 3x$ *na levou stranu a použijte stejný postup jako v 2) s využitím 10.3-3).*

Příklad 12.8: Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice. Vždy určete počet řešení v intervalu $[0, 2\pi)$.

1. $\sin 2x = \sqrt{2} \cos x$,
2. $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$,
3. $2 \cos x \cos 2x = \cos x$,
4. $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2$,
5. $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$,
6. $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$,
7. $\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x$.

Nápověda: 1) Použijte 10.3-1). 2) Nahraďte $\sin^2 x$ *(pomocí goniometrické jedničky) výrazem* $1 - \cos^2 x$ *a řešte kvadratickou rovnici v proměnné* $y = \cos x$. *3) Po převedení na levou stranu, lze* $\cos x$ *vytknout. 4) Podělte 2 a použijte 10.2 zprava doleva. 5) Použijte 10.3-2) na levou stranu. 6) Použijte 10.3-2) zprava doleva. 7) Použijte 10.1-6) a 10.3-2).*

Příklad 12.9: Řešte graficky v $\mathbb{R}$ následující nerovnice.

1. $\sin x > \frac{1}{2}$,
2. $\sin x < \cos x$,
3. $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$.

Příklad 12.10: Řešte v $\mathbb{R}$ následující nerovnice.

1. $\sin 3x < \sin x$,
2. $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$,
3. $\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$,
4. $\sin 2x + \sin x \leq 0$,
5. $1 - \cos x \leq \operatorname{tg} x - \sin x$,
6. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$,
7. $\sin 3x > 4 \sin x \cos 2x$.

Nápověda: 1) Použijte 10.3-3). 2) Použijte substituci $y = \cos x$ *a řešte kvadratickou nerovnici. 3) Pronásobte* $\cos x$ *a použijte 10.1-1). Potom lze dělit* $\sin x$*, ovšem pozor na znaménka při násobení a dělení. 4) Použijte 10.3-2). 5) Pravá strana je součin levé strany a* $\operatorname{tg} x$*. 6) Sečtěte (dle 10.3-2))* $\sin x + \sin 3x$*. 7) Vyjádřit obě strany pomocí* $\sin x$ *(za použití 10.2, resp. 10.3-1), s přihlédnutím k 10.1-1).*

Příklad 12.11: Určete, která $x \in \mathbb{R}$ splňují následující nerovnosti.
a) $\sin x < \frac{1}{\cos x}$,
b) $0 < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{4\cos x}$.