

M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy na procvičení

- Jde o seznam typových úloh, které se probírají na cvičení a dalších obdobných úloh na procvičení za domácí úlohu. Na písémkách se objeví výhradně modifikace příkladů z této sbírky a jim obdobné příklady.
- Příklady označené hvězdičkou jsou určeny pro studenty, kteří by se na cvičení příliš nudili a jsou zde uvedeny pouze jako doplňující příklady, které nebudou obsahem písemek.
- Program jednotlivých cvičení si sestavují vyučující sami a mohou se lišit i v rámci jednotlivých cvičení jednoho vyučujícího.
- Velké množství příkladů je převzato ze sbírky „Seminář ze středoškolské matematiky“ autorů Herman, Kučera, Šimša (skriptum MU, 2004). Dalšími příklady přispěli doc. Čadek, dr. Kruml (oba v roce 2019), doc. Šilhan (2020) a doc. Klíma (2019-2020).

Aktuální verze sbírky ze dne 13. října 2021.

1 Úvodní hodina - zápis množin

Cvičení konaná 14. a 15. 9. 2021.

Příklad 1.1: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech přirozených čísel, která jsou dělitelná třemi.
2. Množinu všech celých čísel, která dávají po dělení osmi zbytek 5.
3. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je větší než 3.
4. Množinu všech (kladných) reálných čísel, jejichž druhá mocnina je menší než jejich trojnásobek.
5. Množinu všech dvojic reálných čísel, kde první je trojnásobkem druhého.
6. Množinu všech dvojic kladných reálných čísel, kde první je větší než trojnásobek druhého.
7. Množinu všech trojic přirozených čísel, která mohou být délkami stran pravoúhlého trojúhelníka. Je tato množina prázdná?

Příklad 1.2: Pomocí množinového zápisu запиšte následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech lichých přirozených čísel, která jsou dělitelná 5.
2. Množinu všech dvouciferných celých čísel, která jsou dělitelná 17.
3. Množinu všech reálných čísel x , která jsou řešením nerovnice $x^2 + 2x + 1 > 0$.
4. Množinu všech kladných reálných čísel, jejichž třetí mocnina je menší než jejich druhá mocnina.
5. Množinu všech dvojic přirozených čísel, kde první dělí druhé.
6. Množinu všech dvojic celých čísel, která se navzájem dělí, tj. první dělí druhé a naopak.
7. Množinu všech čtveřic celých čísel, kde třetí je součtem prvních dvou a čtvrté je součinem prvních tří.

Příklad 1.3: Napište formální definice:

1. Celé číslo a je sudé.
2. Celé číslo a je liché.
3. Celé číslo a je dělitelné třemi.
4. Celé číslo a není dělitelné třemi.
5. Celé číslo a je dělitelné číslem b .

Příklad 1.4: Dokažte platnost následujících tvrzení pro libovolná celá čísla a a b .

1. Z čísel a , b a $a + b$ je aspoň jedno sudé.
2. Pokud je $a + b$ sudé, pak $a - b$ je sudé.
3. Číslo $a + b$ je sudé právě tehdy, když je sudé číslo $a - b$.
4. Pokud je $a + b$ sudé, pak $a^2 + b^2$ je také sudé.
5. Pokud je $a + b$ liché, pak $a^2 + b^2$ je také liché.
6. Číslo $a^2 + a$ je sudé číslo.
7. Číslo $a^3 - a$ je dělitelné 3.
8. Číslo $a^4 - a^2$ je dělitelné 4.

Příklad 1.5: Necht' a, b, c, d jsou různá jednociferná kladná celá čísla taková, že 3 dělí $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Dokažte, že potom $a^2 + b^2$ není dělitelné 3.

Příklad 1.6: V následujících příkladech запиšte množinu M bodů v rovině, a pak určete výčtem prvků množinu všech dvojic celých čísel x a y takových, že $[x, y] \in M$.

1. M je obdélník, jehož tři vrcholy jsou $[-2, -2]$, $[-2, 0]$ a $[1, -2]$.
2. M je trojúhelník ABC , kde $A = [3, 2]$, $B = [1, -2]$ a $C = [-1, 1]$.
3. M je množina bodů $[x, y]$ v kruhu se středem $(8, 3)$ a poloměrem 4, pro které navíc platí $x \leq y$.
4. M je průnik trojúhelníku, jehož vrcholy jsou počátek $[0, 0]$ a body $[0, 4]$ a $[4, 0]$, s množinou všech bodů $[x, y]$, pro které platí $(x - y - 2)^2 = 9$.
5. M je tvořena body (x, y) rovnoběžníku, jehož tři vrcholy jsou $[0, 0]$, $[-6, 0]$ a $[4, 3]$, které zároveň leží pod přímkou $y = x + 1$.

Pozn.: Body obdélníku, trojúhelníku atd. míníme body, které jsou buď „uvnitř“ nebo „na hranici“ tohoto útvaru. Rozmyslete si, jak by se řešení lišilo v případě, kdybychom uvažovali pouze „vnitřní“ body.

Příklad 1.7: Necht' M je množina bodů v rovině, které jsou uvnitř (tj. nikoli na stranách) čtverce se středem v bodě $[4, 3]$, stranou délky 2, jehož úhlopříčky jsou rovnoběžné s osami x a y . Napište množinu M formálně (tj. body roviny o souřadnicích, které splňují vhodné nerovnosti). Určete dále všechny body s celočíselnými souřadnicemi, které množina M obsahuje.

2 Vyhodnocení vstupního testu

Cvičení konaná 21. a 22. 9. 2021.

Příklad 2.1: Necht' $T = [r, s]$ je těžiště $\triangle ABC$, kde $A = [2, -1]$, $B = [-1, 3]$ a $C = [5, 7]$. Určete hodnoty r a s .

Příklad 2.2: Necht' $S = 72 \text{ cm}^2$ je povrch krychle vepsané do kulové plochy o poloměru r . Určete hodnotu r .

Příklad 2.3: Necht' M je množina všech reálných čísel, která splňují nerovnici $|2x+1| < x+3$. Určete množinu M .

Příklad 2.4: Komplexní číslo z je řešením rovnice $z + |z| = 5 + (2 + i)^2$. Určete komplexní číslo z^2 .

Příklad 2.5: Čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jsou řešením rovnice $x^{2 \log x + 3,5} = 100\sqrt{x}$. Určete číslo $k = ab^2$.

Příklad 2.6: Nechť číslo c je součtem všech řešení rovnice $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ v intervalu $[0, 2\pi]$. Určete hodnotu c .

Příklad 2.7: Určete počet všech lichých pěticiferných přirozených čísel, která neobsahují ve svém zápisu cifru 9.

Příklad 2.8: Nechť $c = a^2 + b^2$, kde a a b jsou délky poloos kuželosečky k o rovnici $k : 3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$. Určete hodnotu c .

Příklad 2.9: Definujte, co je to aritmetický průměr n -tice reálných čísel a_1, a_2, \dots, a_n a co je medián těchto čísel. Na příkladech čtyř čísel ukažte, že někdy je medián menší než aritmetický průměr a jindy je tomu naopak.

Příklad 2.10: Pro n -tici kladných reálných čísel se definují kromě aritmetického průměru i jiné průměry. Nejznámější je geometrický a harmonický průměr:

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$
$$H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a_1, a_2 platí $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$. Pro která a_1, a_2 nastane rovnost? (A značí aritmetický průměr čísel v závorce.)

Příklad 2.11*: Jaká je průměrná rychlost auta, které jede n stejně dlouhých úseků postupně rychlostmi v_1, v_2, \dots, v_n ?

Příklad 2.12*: Nerovnosti z příkladu 2.10 platí nejen pro dvojice, ale pro všechny n -tice kladných reálných čísel. Dokažte, že z nerovnosti $A \geq G$ plyne nerovnost $G \geq H$. Zkuste dokázat nerovnost $A \geq G$.

3 Reálné funkce a jejich grafy

Cvičení konaná 29. 9. 2021.

Zopakujte si, co je zobrazení množiny A do množiny B . O zobrazení do množiny reálných čísel \mathbb{R} budeme mluvit jako o funkci.

Příklad 3.1: Určete definiční obor a obor hodnot zadaných funkcí. Dále načrtněte graf a rozhodněte, zda je funkce injektivní, surjektivní (zobrazení ze svého definičního oboru) a zda je rostoucí, resp. klesající.

1. $f(x) = 2x + 7$,
2. $f(x) = |3x + 1| - x$,
3. $f(x) = \frac{1}{x-1}$,
4. $f(x) = x^2 + 2x + 3$,
5. $f(x) = \log_{10}(x + 2)$,
6. $f(x) = 2^{x-3}$,
7. $f(x) = (x - 1)^2 + (x + 2)^2$,
8. $f(x) = 3 \cos x$,
9. $f(x) = \tan(-x)$.

Příklad 3.2: Funkce f je dána následujícím předpisem

$$f(x) = \frac{1}{\log_{10}(x^2 - 1) - 1}.$$

Najděte její definiční obor jako podmnožinu reálných čísel. Najděte její obor hodnot.

Příklad 3.3: Zkoumejte, jak se mění graf funkce $y = f(x)$, když přejdeme k funkci:

1. $y = 2f(x)$,
2. $y = \frac{1}{3} \cdot f(x)$,
3. $y = -f(x)$,
4. $y = f(-x)$,

5. $y = f(x + 3)$,
6. $y = f(x - 2)$,
7. $y = f(x) - 4$,
8. $y = f(x) + 6$,
9. $y = f(3x)$,
10. $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Je-li původní funkce rostoucí na svém definičním oboru, co můžeme říci o nově vytvořených funkcích?

Příklad 3.4: S využitím úlohy 3.3 rozložte následující funkce jako složení "jednodušších" funkcí.

1. $f(x) = |3x - 8| + 2$,
2. $g(x) = \frac{3}{x+5} + 2$,
3. $h(x) = \log_{10}(2x + 3) - 5$.

Nakreslete grafy těchto funkcí. Rozhodněte, zda jsou funkce rostoucí, resp. klesající, případně dejte příklad vhodných intervalů, na kterých je funkce rostoucí, resp. klesající.

Příklad 3.5: Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$ a oborem hodnot $H(f) = (0, \pi/2)$ a předpokládejme, že $f(x)$ je klesající na celém definičním oboru.

- a) Dokažte, že pak funkce $\cos(f(x))$ je rostoucí na celém definičním oboru.
- b) Rozhodněte o chování funkce $g(x) = \frac{\cos(x-\pi/2)}{f(x)}$ na intervalu $(0, \pi/2)$. Možné odpovědi jsou, že funkce $g(x)$ je na tomto intervalu buď rostoucí nebo klesající nebo se takto chová jen na části daného intervalu nebo monotonie závisí na volbě funkce $f(x)$. Odpověď je vždy třeba dokázat.

4 Maximální intervaly monotonie funkcí

Cvičení konaná 5. a 6. 10. 2021.

Příklad 4.1:

1. Definujte (formálně) pojem „funkce f je rostoucí na intervalu I “.
2. Definujte formálně „maximální interval, kde je funkce f rostoucí“.

3. U funkcí z příkladů 3.1, 3.2 a 3.4 zjistěte, na kterých maximálních intervalech jsou rostoucí, resp. klesající.
4. Zformulujte precizně tvrzení, že složení rostoucích funkcí (na intervalu) je rostoucí funkce (na intervalu) a větu dokažte. Zejména si uvědomte, jaké všechny předpoklady je třeba uvést. Přesněji: pokud g je rostoucí funkce na intervalu I , kde $I \subseteq D(g)$, a dále f je rostoucí funkce na intervalu $J \subseteq D(f)$, potom ještě musíme něco předpokládat o množině $\{g(x); x \in I\}$, abychom mohli dokázat, že $f \circ g$ je rostoucí na intervalu I .

Příklad 4.2: Nakreslete graf funkce

$$f(x) = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) - 1.$$

Určete všechny maximální intervaly, na nichž je funkce klesající (resp. rostoucí). Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$. Určete zejména, kolik je takových reálných čísel v intervalu $(0, 2\pi)$.

Příklad 4.3: Mějme funkci

$$f(x) = \frac{1}{|e^{2x-1} - 1|}.$$

Určete její definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a určete, na kterých maximálních intervalech je tato funkce rostoucí nebo klesající.

Příklad 4.4: Nechť f a g jsou rostoucí funkce na intervalu I , tj. zejména $I \subseteq D(f) \cap D(g)$. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = f(x) + g(x)$,
2. $h(x) = f(x) - g(x)$,
3. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$,
4. $h(x) = -g(x)$,
5. $h(x) = g(x) \cdot g(x)$,
6. $h(x) = |g(x)|$,
7. $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

V případech, kdy odpovídáte „ano“, se pokuste o formální důkaz. V případech, kdy odpovídáte „ne“, dejte protipříklad a navíc se pokuste (přidáním vhodných předpokladů pro funkce f a g) zformulovat platné tvrzení.

Příklad 4.5: Nechť g je rostoucí funkce na intervalu I , tj. zejména $I \subseteq D(g)$ a necht' $c \in \mathbb{R}$ je pevně zvolené reálné číslo. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

1. $h(x) = g(x) + c$,
2. $h(x) = c - g(x)$,
3. $h(x) = c \cdot g(x)$.

Pozor, odpověď se může lišit v závislosti na parametru c .

Příklad 4.6: Udejte příklad rostoucích funkcí f a g s definičním oborem \mathbb{R} takových, že funkce h , daná předpisem $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, je klesající funkce na celém definičním oboru $D(h) = \mathbb{R}$.

Nápověda: Pokuste se nejdříve načrtnout grafy vašich funkcí f , g a h . Poté se pokuste vymyslet nějaký vhodný předpis pro tyto funkce (jako složení elementárních funkcí).

Příklad 4.7: Nechť f je rostoucí funkce na celém definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}$ s oborem hodnot $H(f) = (0, \infty)$. Uvažujme dále funkci g danou předpisem $g(x) = x \cdot f(x)$. Dokažte, že funkce g je rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$.

V důkazu identifikujte krok, kde se využije předpoklad $H(f) = (0, \infty)$, a dále krok, kde se využije předpoklad, že I obsahuje pouze kladná reálná čísla.

Ukažte, že oba tyto předpoklady jsou nutné. Zejména dejte příklad rostoucí funkce f s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$, takové, že $H(f)$ obsahuje 0 nebo záporné číslo, pro niž funkce $g(x) = x \cdot f(x)$ není rostoucí na intervalu $I = (0, \infty)$. Poté zformulujte podobně tvrzení o existenci funkce f v druhém případě a dejte vhodný příklad takové funkce.

5 Kvadratické funkce

Cvičení konaná 12. a 13. 10. 2021.

Příklad 5.1: Pomocí úpravy na čtverec odvoďte "vzoreček" pro řešení obecné kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Načrtněte graf kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ pro $a > 0$ a pro $a < 0$. Určete, jaké maximum nebo minimum tato funkce nabývá a v kterém bodě.

Příklad 5.2: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby daná nerovnost platila pro všechna $x \in A$. (Kreslete si, jak musí vypadat grafy příslušných kvadratických funkcí.)

a) $(r + 4)x^2 - 2rx + 2r - 6 < 0, A = \mathbb{R}$.

b) $rx^2 - 4x + 3r + 1 > 0, A = (0, \infty)$.

c) $(r - 2)x^2 + rx + 1 - r > 0, A = (0, \infty)$.

d) $(x - 3r)(x - r - 3) < 0, A = [1, 3]$.

Příklad 5.3: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost $(r - 2)x^2 + rx + 3r + 2 > 0$, platila pro všechna $x \in [3, 5]$.

Příklad 5.4: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost

$$(rx - 1)(x + r) < 0$$

platila pro všechna $x \in A$.

a) $A = (0, 1)$.

b) $A = (-1, 1)$.

c) $A = (-2, 2)$.

d) $A = (0, \infty)$.

Příklad 5.5: Určete, kdy pro řešení $x_1 \leq x_2$ rovnice

$$2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$$

platí $x_1 < a < x_2$. *Nápověda:* Vyznačte na grafu příslušné kvadratické funkce její hodnotu v a .

Příklad 5.6: Určete, kdy pro řešení x_1 a x_2 rovnice

$$(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$$

platí $x_1 > 3$ a $x_2 < 2$.

Příklad 5.7: Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má následující polynom dvojnásobný kořen

$$(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3.$$

Příklad 5.8: Najděte nejmenší celé číslo k , pro něž má rovnice

$$x^2 - 2(k + 2)x + 12 + k^2 = 0$$

dvě různá reálná řešení.

Příklad 5.9*: Nalezněte kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejímž jedním řešením je

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}.$$

Příklad 5.10*: Označme

$$a = \sqrt[3]{3\sqrt{21} + 8}, \quad b = \sqrt[3]{3\sqrt{21} - 8}.$$

Dokažte, že součin i rozdíl těchto dvou reálných čísel je celočíselný a určete jej. Zjednodušte algebraické výrazy pro čísla a a b tak, aby obsahovala kromě celých čísel a obvyklých operací již pouze druhé odmocniny.

Nápověda: Napište si kvadratickou rovnici s dvojicí řešení a , $-b$.

První vnitrosemestrální písemka

Psaná dne 18.10.2021 na obsah kapitol 1, 3, 4 a 5.

6 Funkce s absolutní hodnotou, racionální kořeny celočíselných polynomů

Cvičení konaná 19. a 20.10. 2021.

Příklad 6.1: Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) = |2x - 3| - |x + 2| + |10 - 3x| - 1.$$

1. Nakreslete graf funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[-5, 5]$.
2. Najděte obor hodnot funkce f .
3. Určete maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní.
4. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) < 2$.

Příklad 6.2: Řešte v \mathbb{R} rovnice

1. $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = |x + 2|$,

2.

$$\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1$$

Příklad 6.3: Uvažujme dvě funkce $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisy

$$f(x) = \left| |x + 1| + |x - 1| \right|, \quad g(x) = \left| |x + 1| - |x - 1| \right|.$$

1. Načrtněte grafy funkcí f a g .
2. Najděte obor hodnot těchto funkcí.
3. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f rostoucí, resp. klesající.
4. Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce g rostoucí, resp. klesající.
5. Určete všechna řešení nerovnice $g(x) < f(x)$, tj.

$$\left| |x + 1| - |x - 1| \right| < \left| |x + 1| + |x - 1| \right|.$$

Příklad 6.4*: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\left| x + \frac{1}{x + 1} \right| \geq 1.$$

Příklad 6.5: Najděte nějaký polynom s celočíselnými koeficienty,

1. jehož kořeny jsou $0, 1, -1/2$,
2. jehož jediný reálný kořen je -1 , ale stupeň polynomu je větší než 1 ,
3. který má trojnásobný kořen 1 ,
4. jehož kořeny jsou $\sqrt{2}, -1$ a případně další reálná čísla.

Příklad 6.6: Dokažte kritérium pro racionální kořeny polynomů s celočíselnými koeficienty: Pokud zlomek ve zkráceném tvaru $\frac{p}{q}$ je kořenem polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ s celočíselnými koeficienty, potom $p \mid a_0$ a $q \mid a_n$.

Příklad 6.7: Najděte všechny racionální kořeny polynomu:

1. $2x^3 + x^2 - 4x - 3$,

2. $27x^3 + 27x^2 - 4$,

3. $4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 7x - 2$.

Příklad 6.8: Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby obě rovnice měly aspoň jedno společné řešení.

$$x^2 + ax + 8 = 0, \quad x^2 + x + a = 0.$$

Příklad 6.9: Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby obě rovnice měly aspoň jedno společné řešení.

$$(1 - 2a)x^2 - 6ax - 1 = 0, \quad ax^2 - x + 1 = 0.$$