Volitelné domácí úlohy a příklady na zamyšlení k předmětu **M3100**

Příklady k procvičení

1. Rozhodněte o absolutní konvergenci řad

   (a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n}.$$

   [Konverguje neabsolutně.]

   (b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p},$$

   kde $p = 1$, respektive $p = 2$.

   [Pro $p = 1$ konverguje neabsolutně, pro $p = 2$ absolutně.]

   (c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(5+(-1)^n \sin n)^n}.$$

   [Konverguje absolutně. Členy jsou ve skutečnosti kladné.]

2. Pomocí Abelova kritéria rozhodněte o konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2 \operatorname{arctg}(1/n^2)}{(n+1)(n+2)} n^{-n}$$

   [Řada konverguje.]

3. Za předpokladu že víte, že řada $\sum \frac{\sin n}{n}$ konverguje rozhodněte o konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$$

   [Řada konverguje.]

4. Pomocí Dirichletova kritéria rozhodněte o konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$$

   [Řada konverguje.]

5. Pomocí Dirichletova kritéria rozhodněte o konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n \ln n}$$

[Řada konverguje.]

6. Pomocí Dirichletova kritéria rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \frac{\sin(n\pi)}{4}$$

[Řada konverguje.]

7. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^n n}$$

[Řada konverguje dokonce absolutně.]

8. Určete Cauchyův součin řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$$

[$c_n = \frac{n(n+1)}{2} q^n$.]

9. Kolik členů je třeba sečíst, abychom odhadnuli součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

s chybou menší než 10^{-3}.

10. Kolik členů je třeba sečíst, abychom odhadnuli součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

s chybou menší než 10^{-3}.

[Aspoň 1000.]

11. Kolik členů je třeba sečíst, abychom odhadnuli součet

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^n n}$$

s chybou menší než 10^{-3}.

[Aspoň 16 postupem který jsem volil já (lze volit i jiné).]

[Aspoň 7.]

12. Ukažte, že posloupnost funkcí
$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x^n)}{n}$$
konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$.

13. Nalezněte bodovou limitu posloupnosti funkcí
$$f_n(x) = x^n - x^{2n}$$
a rozhodněte zda tyto funkce konvergují stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$? Na intervalu $[0,1]$?

[$f_n(x) \to 0$ na$[0,1]$, $f_n(x) \to -\infty$ na $(1,\infty)$, jinde nekonverguje a nekonverguje stejnoměrně nikde]

14. Nalezněte bodovou limitu posloupnosti funkcí
$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$$
a nalezněte největší možnou množinu na které je tato konvergence stejnoměrná.

[$f_n(x) \to \infty$ pro$x < 0$, $f_n(x) = 1$ pro$x = 0$, $f_n(x) \to 0$ pro$x > 0$. Hledaný interval je $(0,\infty)$.]

15. Rozhodněte zda řada
$$\sum \frac{\mathrm{e}^{-x^2 n^2}}{n^2}$$
konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$.

[Ano, konverguje stejnoměrně.]

16. Rozhodněte zda řada
$$\sum \frac{x}{1 + n^4 x^2}$$
konverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$.

[Ano, konverguje stejnoměrně.]

17. Mějme funkci
$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-nx}$$
na intervalu $[1,\infty)$. Rozhodněte o monotonii této funkce na tomto intervalu.

[$F'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,\mathrm{e}^{-nx}$. Fce je tedy klesající.]

18. Určete poloměr konvergence mocninné řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$$

$[R = \frac{1}{2}]$

19. Koupili jste si látku a prodavač vám ustřihne $a_n = (n+1)/n^3$ metrů látky za minutu, navíc je obětavě ochoten stříhat nekonečně dlouho. Jak dlouho jej musíte nechat stříhat, aby jste nepřišli o více než 1 centimetr látky (tj. abyste jej nezastavili moc brzo).

[Asi 110.]

20. Vítr unáší list sem a tam, který padá z dostatečně velké výšky, aby padal skoro nekonečně dlouho. V každé sekundě navíc vítr posune list do strany o $a_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ metrů. S jakou přesností dokážeme určit místo dopadu listu po
    (a) jedné minutě.
    (b) po deseti minutách

[a) asi 0,18 b) asi 0,0017]

Příklady k zamyšlení

1. Nalezněte konvergentní alternující řadu, na niž nelze použít Leibnitzovo kritérium.
2. Nalezněte konvergentní řadu, která nekonverguje absolutně.
3. Nalezněte posloupnosti $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ takové, aby
    - řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ byly divergentní, ale řada
      $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$
      byla relativně konvergentí.
    - řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ byly divergentní, ale řada
      $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n$$
      byla absolutně konvergentní.
    - řady $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ byly absolutně konvergentní, ale řada
      $$\sum_{n=1}^{\infty} e_n f_n$$
      byla relativně konvergentní.
4. Nalezněte konvergentní řadu $\sum a_n$, aby její permutace b_n splňovala
    - $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.
    - $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\infty$.
5. Nalezněte posloupnosti a_n, b_n tak aby

- Dirichletův součin $a_n \cdot b_n$ divergoval. Divergenci dokažte.
- Cauchyho součin $a_n \cdot b_n$ divergoval. Divergenci dokažte.

6. Nalezněte obecný vzorec pro výpočet Cauchyho a Dirichletova součtu řad $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/3^n$.

   $[C_n = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} 3^i}{6^n},\ D_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} 3^i + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i + 1}{6^n}]$

7. Nalezněte posloupnost funkcí $f_n(x)$ a funkci $g(x)$ takové, že
   - $f_n(x) \to g(x)$ na intervalu $[0,1]$, ale $f_n(x) \nrightarrow g(x)$ na intervalu $(1,2]$.
   - $f_n(x) \rightrightarrows g(x)$ na intervalu $[0,1]$.
   - $f_n(x)$ konverguje stejnoměrně, ale $g \circ f_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně.

8. Ukažte, že pokud $f_n(x)$ a $g_n(x)$ konvergují stejnoměrně na I, pak také $Af_n(x) + Bg_n(x)$ a $h(x)f_n(x)$ konvergují stejnoměrně na I, kde $A, B \in \mathbb{R}$ a $h(x)$ je fce definovaná na I.

9. Analogicky k stejnoměrné konvergenci definujte stejnoměrnou divergenci k ∞ na I a nalezněte posloupnost funkcí $f_n(x) \rightrightarrows \infty$ na nějakém intervalu I. Začněte definicí bodové divergence posloupnosti $f_n(x)$.

10. Nalezněte posloupnost funkcí $f_n(x)$, která diverguje bodově, ale ne stejnoměrně na intervalu I.

11. Ukažte, že
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 nx}{n^4 + 1}$$
    je spojitá a má spojitou derivaci.

12. Pomocí Abelova kritéria ukažte, že je-li $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konvergentní na $I = [-1,1]$, pak také
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \frac{x}{n}$$
    konverguje stejnoměrně na I.

13. Nalezněte příklad funkcí $f_n(x)$, které jsou ohraničené, ale nekonvergují stejnoměrně.

14. Nalezněte posloupnosti $a_n, f_n(x)$ takové, že $a_n < |f_n(x)|$ pro každé n, x a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje.