$f_n(x)$ monotónní ${}^{\text{na } \boxed{I}}$ pokud $f_n(x_0)$ je monotónní pro $\forall x_0 \in I$

Př: $f_n(x) = \dfrac{\sin^2 x}{n}$ na $\mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \dfrac{\sin^2 x_0}{n}$ klesající posl.

Př: $f_n(x) = x^n$ na $(0,1)$ nebo $(1,\infty)$ ↗ klesající $f_n(x)$ ⇝ rostoucí $f_n(x)$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{4}\right)^n$ $\quad \lambda \in (0,1) \quad \lambda^{n+1} < \lambda^n$

$\alpha > 1 \rightsquigarrow \quad \alpha^n < \alpha^{n+1}$

Př: $f_n(x) = \sin(nx)$ na $\mathbb{R}$ NENÍ monotónní

$x_0 \in \mathbb{R} \rightsquigarrow x_0 = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$

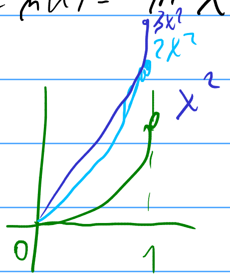
$f_n(x)$ stejnoměrně ohraničená na I pokud $\exists K$ že $\forall n$ a $\forall x \in I$ je $|f_n(x)| \le K$

Př: $f_n(x) = \sin nx$ na $\mathbb{R}$

$|\sin(nx)| \le 1$ ⇝ nezávisí na n ani na x

STEJNOM. OHR.

Př: $f_n(x) = n x^2$ na $[0,1]$ NENÍ STEJNOM. OHR.



$\forall K$ libovolně velké najdu nějaké n že $n \cdot 1^2 > K$

$x = 1$

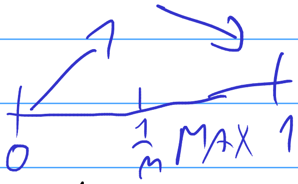
Př: $f_n(x) = \dfrac{2n^2 x}{1+n^2x^2}$ na $[0,1]$ Đ $-\frac{1}{n}$

$$f_n'(x) = \frac{2n^2 \cdot (1+n^2x^2) - 2n^2x\,2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$$2n^2 + 2n^4x^2 - 4n^4x^2 = 2n^2 - 2n^4x^2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$x^2 = \frac{1}{n^2}$$

$f_n(0) = 0$



$$x = \frac{1}{n}$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n^2\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{2 \cdot n}{1+1} = n \leftarrow \text{MAX}$$

NENÍ STEJN. OHR.

ABEL

nechť $g_n(x)$ je monotónní na I, $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na I a $g_n(x)$ je stejnoměrně ohraničená na I

$\Rightarrow \sum f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na I

Př: $$\sum_{n=2}^{K} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n \ln n + n x}} = \sum f_n g_n$$

$I = [0, \infty)$

$$= \sum_{n=2}^{K} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(\ln n + x)}} \qquad \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{f_n(x)} \qquad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\ln n + x}}}_{g_n(x)}$$

$\sum f_n(x) = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ alternující řada

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \rightarrow$ KONVERGUJE

protože nezávisí na X tak konverg. stejnoměrně

$I = [0, \infty)$

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln n + x}} \leq \frac{1}{\sqrt{\ln n + 0}} \leq \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$$

STEJNOM. OHR.

$\frac{1}{\sqrt{\ln n + x}}$ MONOTONNÍ

$\sum f_n g_n$ konv. stejnoměrně

DIRICHLET

Nechť $g_n(x)$ je monotónní na I, řada $\sum f_n(x)$ má stejnoměrně ohraničené částečné součty a $g_n \rightrightarrows 0$ na I

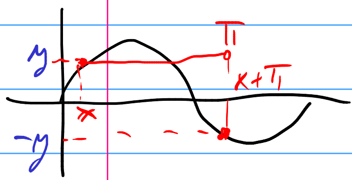
$\Rightarrow \sum f_n g_n$ konverguje stejnoměrně na I

Př: $\sum_{n=1}^{K} \frac{\sin(n\pi+x)}{n}$ konv. stejnom. $I=[0,\infty)$

$\sum f_n g_n$ konverguje stejnoměrně

$f_n(x)=\sin(n\pi+x)$ $\qquad \frac{1}{n}=g_n(x)$

$\sin(n\pi+x) = -\sin((n+1)\pi+x)$



$\sum \sin(n\pi+x) = \sin(\pi+x) - \sin(\pi+x)+\sin(\pi+x)\ldots$

$s_n = \begin{cases} \sin(\pi+x), & n \text{ liché} \\ 0, & n \text{ sudé} \end{cases}$

$g_n(x)\to 0 \leadsto$ spoj.

$g_n(x)$ je monotónní $\qquad g_n(x)=\frac{1}{n}$ kles. na $[0,\infty)$

spoj.

$g_n(x)\rightrightarrows 0$

nelze Weier. krit.

$\sum \frac{1}{n}$ DIV

$\left|\frac{\sin(n\pi+x)}{n}\right| \le \frac{1}{n}$

Nechť $f_n(x)$ má monotónní posl na $[a,b]$ a $f_n(x)$ jsou spojité na $[a,b]$

1 dále nechť $f_n \to f$ a f je na $[a,b]$ spojitá

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ na } [a,b]$$

Př: $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $I = \underbrace{[1,\infty)}$ $\qquad f_n(x) \to 0$ ← je spojitá

x pevné $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+nx} = 0$

$1+nx \neq 0 \to f_n(x)$ je spojitá na $[1,K]$

$\dfrac{1}{1+nx} \overset{x \text{ pevné}}{\leadsto}$ klesající posl. $\qquad f_n(x)$ klesající na lib. $[1,K]$

$$\frac{1}{1+nx} > \frac{1}{1+(n+1)x} \checkmark \Big/ - \frac{1}{1+(n+1)x}$$

$$\frac{\cancel{1}\cancel{+nx}+x-\cancel{1}-\cancel{nx}}{(1+nx)(1+nx+x)} = \frac{x}{(1+nx)(1+nx+x)} > 0 \checkmark$$

$f_n \rightrightarrows 0$ na $[1,K]$ $\leadsto$ $f_n \rightrightarrows 0$ na $[1,\infty)$

$K \in \mathbb{R}$

$K > 1$