① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{n-\ln n}_{\neq 0}}$ K/D?

$\rightsquigarrow \frac{-1}{1}, \frac{1}{2-\ln 2}$

$n-\ln n > 0 \rightsquigarrow$ alternující řada

$$\frac{(-1)^n}{n-\ln n} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n+1-\ln(n+1)} < 0$$

• $\displaystyle\sum^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n-\ln n}\right|$ K $\Rightarrow \displaystyle\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{n-\ln n}_{b_n}}$ K

• Leibnitzovo krit.

$b_n \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{n-\ln n}}$

$b_n = (-1)^n \cdot a_n$, $a_n \geq 0$

a_n $\boxed{\text{nerostoucí}}$: $\overset{?}{\checkmark}$ $\displaystyle\sum^{\infty} b_n$ K $\Leftarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

$x > 1$

$a_n = \frac{1}{n-\ln n}$ $\left(\frac{1}{x-\ln x}\right)' = -\frac{1-\frac{1}{x}}{(x-\ln x)^2} < 0$

pro $x > 1$ je fce klesající

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\ln n} \overset{\frac{1}{n}/\frac{1}{n}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\to 0}{1-\frac{\ln n}{n}\to 0} = 0$

$\frac{\ln n}{n} \to 0$

K podle Leib. krit.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ~~KA~~ / KN / ~~D~~ ?

1) ~~$\sum |a_n|$ K $\rightarrow$ KA~~

2) $\sum^{\infty} |a_n|$ D, $\sum^{\infty} a_n$ K $\rightarrow$ KN

3) $\sum^{\infty} a_n$ D $\rightarrow$ D

NPK

$$\sum^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \boxed{\sum^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}\ \text{D}$$

$\frac{1}{2} < 1$

alternující řada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = |0 \cdot \text{OHK}| = 0 \quad \text{splněna NPK}$$

$(-1)^n$ OHK $\quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ a je nerostoucí posl. tedy dle Leibn. Krit. řada K a tedy konverguje neabsolutně

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+3)}{\underbrace{(2n+1)^3}_{\neq 0}}$ KA/ ~~KN/D~~?

nemí alternující řada

$\frac{\sin(n+3)}{(2n+1)^3}$ OHR, $(2n+1)^3 \to \infty$

$= |0 \cdot OHR| \to 0$ NPK ✓

KV$_\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n+3)}{(2n+1)^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n+3)|}{(2n+1)^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ K $\leq$

K chceme ✓ ↗ chceme

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} \leq \sum \frac{1}{n^3}$ K

$\lim \frac{\frac{1}{(2n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} \to \frac{1}{8}$

řada konverguje absolutně

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cos\frac{1}{n^2}}{e^n(n+1)(n+2)}$ K/D?

≥ 0 ≥ 0 ≥ 0

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3 \sqrt[n]{\cos\frac{1}{n^2}}}{e \sqrt[n]{n+1} \cdot \sqrt[n]{n+2}} \to \frac{1}{e} < 1 \quad \boxed{K}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\cos\frac{1}{n^2}\right)$ $\frac{0}{\infty}$ $\to e^0 = 1$

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{n+2} \leq \sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}$$

$\downarrow 1$ $\downarrow 1$

$a_n = \frac{n^3}{e^n(n+1)(n+2)}$ $\quad b_n = \cos\frac{1}{n^2}$ $\leadsto$ ohr.

$\frac{1}{n^2}$ monotónní $\cos x$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$ klesá a tedy b_n klesá

$\sum^{\infty} a_n \cdot b_n \Rightarrow$ konverguje

$\sum^{\infty} a_n$ K ✓ b_n ohr. a monotónní ✓

ANO podle odmocninového krit.

$$\sum^{\infty} \frac{\sin(n+3)}{(2n+1)^2 \ln^5(2n+1)}$$

$a_n = \frac{\sin n+3}{(2n+1)^2}$ $\quad b_n = \frac{1}{\ln^5(2n+1)}$

$\sum^{\infty} a_n$ K $\quad b_n$ OHR

b_n je monotónní

$\leadsto$ K

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+3}$ kolik členů musíme sečíst, aby byla |chyba součtu| < 10^{-3}

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+3} = \sum_{n=1}^{k} a_n + R_k$$

$R_k < 10^{-3}$

$k = ?$

$\sum^{\infty} a_n$ K podle Leibnizova krit. $\Rightarrow |R_k| < |a_{k+1}|$

$$\sum^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+3}$$

$(-1)^{n+1}$ mění znam. AND alternující

$n+3 \to 0$

K dle Leib. krit. $\frac{1}{n+3} = b_n$ nerostoucí $\frac{1}{n+3} \to 0$

$$|R_k| < b_{k+1} = \boxed{\frac{1}{k+4} \leq 10^{-3}}$$

pro které k?

$$\frac{1}{k+4} \leq \frac{1}{10^3}$$

$$k+4 \geq 10^3$$

$$k \geq 1000-4 = \underline{\underline{996}}$$

⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ kolik členů musíme sečíst, aby byla $|\text{chyba součtu}| < 10^{-3}$

$\sum a_n$ K podle integrální kritéria na $f: [1,\infty) \Rightarrow |R_k| \leq \int_k^{\infty} f(x)\,dx$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3} \geq 0 \qquad f' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^3 - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1-3\ln x}{x^6} < 0$$

$[k,\infty)$ ✓

$$\int_k^{\infty} f(x)\,dx = \int_k^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \begin{vmatrix} \ln x & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^3} & \frac{x^{-2}}{-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[-\frac{\ln x}{2x^2}\right]_k^{\infty} + \frac{1}{2}\int_k^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{\ln k}{2k^2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_k^{\infty} =$$

$$= \frac{\ln k}{2k^2} + \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{2k^2}\left(\ln k + \frac{1}{2}\right) < \infty \quad \boxed{K}$$

$$R_k < \frac{1}{2k^2}\left(\ln k + \frac{1}{2}\right) \leq 10^{-3}$$

$$500\left(\ln k + \frac{1}{2}\right) \leq k^2$$

$k = ?$

$e^n = k \qquad \ln e^n = n$

hledané $k = \lceil e^n \rceil$

$$500\left(\ln e^n + \frac{1}{2}\right) \leq e^{2n}$$

$$500\left(n + \frac{1}{2}\right) \leq 4^n \leq e^{2n}$$

$n = 6$

$$500n + 250 \leq 4096$$

$$3250 \leq 4096 \leq e^{12} ✓$$

$k = \lceil e^{12} \rceil$ máme hledané k