Volitelné domácí úlohy a příklady na zamyšlení k předmětu **M3100**

**Příklady k procvičení**

1. Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

[$R = 1, I = (-1, 1]$.]

2. Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$$

[$R = 4, I = (-4, 4)$.]

3. Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n-3}x^{4n-3}$$

[$R = 1, I = (-1, 1)$.]

4. Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8^n+1}{2n+1}x^n$$

[$R = \frac{1}{8}, I = [-1, 1)$.]

5. Určete poloměr a obor konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{\operatorname{arctg} n}\right)^n x^n$$

[$R = \frac{\pi}{2}, I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.]

6. Určete součet řady

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n+2)x^n$$

[$\frac{16x^4-23x^5+9x^6}{(1-x)^3}$.]

7. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$[(x+1)\ln(1+x)-x.]$

8. Pomocí součtu řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n}x^{2n}$$

$[\ln|x^2-1|-\frac{2x^2}{x^2-1}.]$

9. Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce $\sin x^2$.

$[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{4n-2}}{(2n-1)!}.]$

10. Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce $\cosh 2x$. Zkuste jiný zápis funkce

$$\cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^{2n}}{(2n)!}.]$

11. Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce $\frac{\sin x}{x^4}$.

$[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-3}}{(2n+1)!}.]$

12. Nalezněte prvních pár členů Maclaurinovy řady funkce $x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

$[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!}.]$

13. Nalezněte prvních pár členů Maclaurinovy řady funkce $\mathrm{e}^x\sin x$.

$[x+x^2+\frac{1}{3}x^3+0x^4+\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{12}\right)+\ldots.]$

14. Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce $\frac{1}{3-2x}$.

$[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}x^n.]$

15. Určete přibližnou hodnotu $\sin 10^\circ$ s přesností $10^{-6}$.

$[0,17364.]$

16. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

$[\mathrm{e}^2-3.]$

17. Sečtěte řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{n!}$$

[$2\,\mathrm{e}^2$.]

18. Sečtěte řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

[$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.]

19. Určete číslo $\frac{1}{\mathrm{e}}$ pomocí prvních osmi členů vhodné řady.

[$0,3678$.]

20. Určete číslo $\ln \frac{1}{2}$ pomocí prvních tří členů vhodné řady.

[$-0,693$.]

21. Určete limitu
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[3]{1+x^2}}{x}$$

[$-\frac{1}{2}$.]

22. Určete limitu
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-x^2/2}}{x^4}$$

[$-\frac{1}{12}$.]

23. Určete limitu
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$$

[$-\frac{1}{3}$.]

24. Vyjádřete integrál jako mocninou řadu
$$\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} \mathrm{d}t$$

[$-\frac{1}{x} + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)!}$.]

25. Určete prvních pár členů řešení rovnice
$$y' + xy^2 - 2\cos x = 0,$$
je-li $y(0) = 1$.

$[1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \dots]$

26. Určete prvních pár členů řešení rovnice

$$y'' - \mathrm{e}^x\, y = 0,$$

je-li $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

$[2 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots]$

**Příklady k zamyšlení**

1. Nalezněte obor konvergence řad

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{3n}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{a^n + b^n + c^n}, a > 0, b > 0, c > 0$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!!}{(2n+1)!!} x^n$$

Vyšetřete krajní body.

[a) $(-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ b)$L = \sqrt{\max\{a, b, c\}}, I = (-L, L)$ krajní body závisí na tom, zda je $L > 1$ nebo ne c) $(-1, 1)$ v $-1$ řada konveguje relativně]

2. Rozviňte do mocninné řady funkci

$$\frac{\ln(1 + x)}{1 + x}$$

$[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(1 + 1/2 + \dots 1/n)x^n]$

3. Nechť má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ poloměr konvergence $R_1$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ poloměr konvergence $R_2$. Jaký poloměr konvergence mají řady

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$$

[a) b) ]

4. Nalezněte posloupnost $a_n$ tak aby

- $(C) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
- $(C) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = K$, pro libovolné $K \in \mathbb{R}$.