Volitelné domácí úlohy a příklady na zamyšlení k předmětu **M3100**

Příklady k procvičení

1. Nalezněte fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkce
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0], \\ x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$
[$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.]

2. Nalezněte fourierovu řadu na intervalu $[-\pi, \pi]$ funkce
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0], \\ \sin x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$
[$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$.]

3. Nalezněte fourierovu řadu funkce $f(x) = \arcsin \sin x$.

[$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.]

4. Nalezněte fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ na intervalu $[-1, 1]$.

[$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(n\pi x)}{n}$.]

5. Rozložte v sinovou řadu funkci $f(x) = x(\pi - x)$ na intervalu $(0, \pi)$. Pomocí tohoto výsledku sečtěte řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$
[$\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, $\frac{\pi^3}{32}$.]

6. Spočtěte integrál
$$\iint_M \frac{x+y}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{pro} \quad M : [1, 2] \times [1, 3]$$
[$2 + \frac{3}{2} \ln 3$.]

7. Vypočtěte integrál
$$\iint_M \cos(x+y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{pro} \quad M : [0, \pi]^2$$
[-4.]

8. Spočtěte integrál
$$\iint_M xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{pro} \quad M : -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1$$

[0.]

9. Vypočtěte obsah množiny, která je ohraničená $x^2 \leq y$, $y - x \leq 2$.

[$\frac{9}{2}$.]

10. Zaměňte pořadí integrace v integrálu

$$\int_2^3 \int_{-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

[$\int_{-1}^1 \int_2^3 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.]

11. Zaměňte pořadí integrace v integrálu

$$\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{2+x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

[$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.]

Příklady k zamyšlení

1. Nalezněte netriviální funkce $f(x), g(x)$ na intervalu $[-1,1]$ takové, že $< f, g >= 0$ na $C[-1,1]$.
2. Najděte systém nespojitých funkcí $f_n(x)$ takových, že $< f_n, f_m >= 0$, pro libovolné n, m.
3. Najděte fourierovy řady na intervalu $[-\pi,\pi]$ funkcí
   (a) $\cos(ax)$, kde $a\ in \mathbb{R}$.
   (b) $\mathrm{sgn}(\cos x)$
   (c) $|\sin x|$

[a) $\frac{\sin(\pi a)}{a\pi} + \frac{2\sin(\pi a)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}$ b) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$ c) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$]

4. Funkce f splňuje $f(x+\pi) = -f(x)$. Ukažte, že four. řada f na intervalu $[-\pi,\pi]$ splňuje $a_{2n} = 0 = b_{2n}$.
5. Funkce f splňuje $f(x+\pi) = f(x)$. Ukažte, že four. řada f na intervalu $[-\pi,\pi]$ splňuje $a_{2n-1} = 0 = b_{2n-1}$
6. Zvolme množiny

$$W_{j,k}^n(A,B) = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 | \frac{j}{2^n A} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n A}, \frac{k}{2^n B} \leq y \leq \frac{k+1}{2^n B}\right\},$$
$$H_{j,k}^n(A,B) = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 | \frac{j}{2^n A} \leq x \leq \frac{j+1}{2^n A}, \frac{k}{B} \leq y \leq \frac{k+1}{B}\right\},$$

kde $j,k \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda pokud zkonstruujeme Jordanovu míru skrze tyto množiny, dostaneme opět $J_n(A) \subseteq J_{n+1}(A)$ a $O_n(A) \supseteq O_{n+1}(A)$.

7. Nalezněte v každém bodě zvlášť množinu A případně posloupnost množin A_n tak aby platilo
   - $m(h(A)) \neq 0$ a určete $m(h(A))$.
   - $J_n(A) = K$ a $O_n(A) = K + 1/n$, kde $K \in \mathbb{R}$.
   - že $m(A_n)$ tvoří oscilující posloupnost.
   - $m(A_n) = [m(A_{n-1})]^2$.
   - $\sum_{i=1}^n m(A_i) = m(\cup_{i=1}^n A_i)$, pro každé n.
   - $m(A_n) = m(\cap_{i=1}^n A_i)$, pro každé n.
8. Nalezněte lineární zobrazení L a neprázdnou množinu A takové, aby platilo
$$m(L(A)) = m(A)/2.$$
9. Nalezněte spojitou funkci na intervalu I, která na I není stejnoměrně spojitá.
10. Nalezněte funkci f a množinu Atakové, že
$$\overline{\iint_A} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq \underline{\iint_A} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
11. Nalezněte funkci $f(x)$ a množinu A, tak aby $\iint_B f\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nezávisel na množině B, $\iint_A g\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nezávisel na funkci g.
12. Nalezněte funkce f, g a množiny A, B takové, že
$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C,$$
$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + C,$$
kde $C \in \mathbb{R}$. Nalezněte je také pro volbu $C \in \mathbb{Z}$.
13. Nalezněte funkci f takovou, že
$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
pro libovolné množiny $B \subseteq A$.