M3121 Pravděpodobnost a statistika I

10. Konvoluce, transformace normálního rozdělení

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Motivační příklad

Příklad 1

Sledujeme výšku Z (v cm) u náhodně vybraných mladých párů v ČR.
X *... výška muže,* $X \sim N(178{,}8;\ 7^2)$
Y *... výška ženy,* $Y \sim N(166{,}2;\ 6{,}4^2)$
Jakým rozdělením se řídí náhodná veličina $Z = X + Y$*?*

Odpověď:

$$Z \sim N(345;\ 7^2 + 6{,}4^2)$$

Věta 1 (připomenutí)

Jestliže náhodné veličiny spojitého typu $X_1 \sim f_{X_1}$ *a* $X_2 \sim f_{X_2}$ *jsou* **nezávislé**, *pak náhodná veličina* $Y = X_1 + X_2$ *má hustotu*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1) dx_1$$

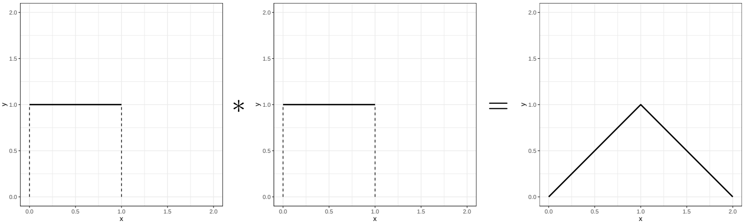
Hustotu $f_Y(y)$ *potom nazýváme* **konvolucí** *(***convolution***) hustot* f_{X_1} *a* f_{X_2}.

Příklad

Příklad 2

Nechť $X \sim Ro(0,1)$, $Y \sim Ro(0,1)$, X, Y *jsou nezávislé. Jakým rozdělením se řídí náhodná veličina* $T = X + Y$*?*

Odpověď:



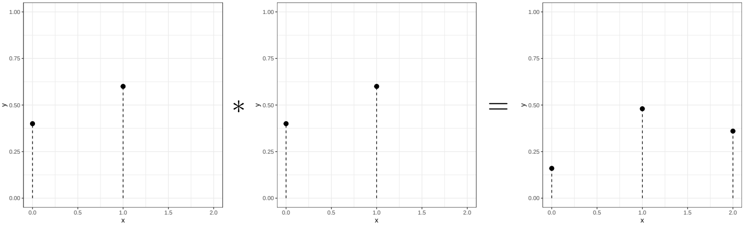
$$f_T(t) = \begin{cases} 1 - |t-1|, & \forall t \in (0,2) \\ 0, & \forall t \notin (0,2) \end{cases}$$

Příklad

Příklad 3

Nechť $X \sim A(\theta)$, $Y \sim A(\theta)$, X, Y *jsou nezávislé. Jakým rozdělením se řídí náhodná veličina* $T = X + Y$?

Odpověď (pro $\theta = 0,6$):



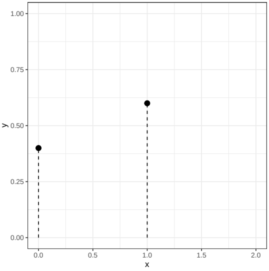
$$p_T(t) = \begin{cases} \binom{2}{t}\theta^t(1-\theta)^{2-t}, & \forall t \in \{0,1,2\} \\ 0, & \forall t \notin \{0,1,2\} \end{cases} \quad ,tj. \quad T \sim Bi(2,\theta)$$

Příklad

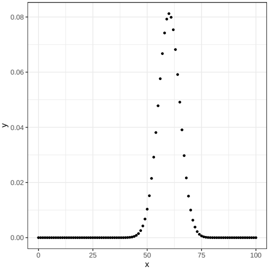
Příklad 4 (obecně)

Nechť $X_i \sim A(\theta), i = 1, \dots n$, $X_1, \dots, X_n$ *jsou nezávislé. Jakým rozdělením se řídí náhodná veličina* $T = X_1 + X_2 + \dots X_n$*?*

Odpověď (pro $\theta = 0,6$; $n = 100$):



$*^n =$



$$p_T(t) = \begin{cases} \binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}, & \forall t \in \{0, 1, \dots n\} \\ 0, & \forall t \notin \{0, 1, \dots n\} \end{cases} \quad , tj. \quad T \sim Bi(n, \theta)$$

Normální rozdělení

Definice 2 (Normální (Gaussovo) rozdělení)

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\quad x \in \mathbb{R},; \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$ $\quad$ značíme $\quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$ $\quad u \in \mathbb{R}$ $\quad$ značíme $\quad U \sim N(0,1)$

Věta 3 (Lineární transformace normálního rozdělení)

Mějme náhodnou veličinu s normálním rozdělením $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dále nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ jsou reálné konstanty. Potom náhodná veličina, která je lineární transformací původní, má opět normální rozdělení, a to

$$Y = a + bX \ \sim \ N(a + b\mu, b^2\sigma^2).$$

Speciálně náhodná veličina

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

má **standardizované normální rozdělení***.*

Transformace normálního rozdělení

Věta 4 (Součet dvou normálních náhodných veličin)

Nechť náhodný vektor
$\mathbf{X} = (X_1, X_2)' \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *má dvourozměrné normální rozdělení s parametry* $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ *a* $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$. *Pak náhodná veličina*

$$Y = X_1 + X_2$$

má také normální rozdělení a platí

$$Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2).$$

Důsledek 5 (Součet dvou nezávislých normálních náhodných veličin)

Nechť $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ *jsou* **nezávislé** *náhodné veličiny. Pak platí*

$$Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Transformace normálního rozdělení

Věta 6 (Lineární kombinace normálních náhodných veličin)

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ *jsou* **nezávislé** *náhodné veličiny takové, že*

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nechť

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0.$$

Potom náhodná veličina, která je lineární transformací normálních náhodných veličin má opět normální rozdělení, t.j.

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \quad \sim \quad N\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

Transformace normálního rozdělení

Věta 7 (Lineární transformace normálních náhodných vektorů)

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *a* $\mathbf{B}$ *je* **regulární** *matice typu* $n \times n$*, dále nechť* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*. Pak platí*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}').$$

Věta 8 (Speciální transformace nezávislých normálních náhodných veličin)

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ *jsou* **nezávislé** *náhodné veličiny takové, že*

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2), \quad i = 1, \ldots, n$$

a $\mathbf{B}$ *je* **ortonormální** *matice typu* $n \times n$*. Položme* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *a*

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)' = \mathbf{B}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$$

kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)'$*. Potom* Y_j *jsou* **nezávislé** *náhodné veličiny a*

$$Y_j \sim N(0, \sigma^2).$$