M3121 Pravděpodobnost a statistika I

1. Úvod do teorie pravděpodobnosti

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Zásadní otázka

Jaký je rozdíl mezi **pravděpodobností** a **matematickou statistikou**?

Motivační příklady

Příklad 1

Házíme opakovaně mincí. Ze 100 náhodných pokusů: 56 $\times$ „hlava“ a 44 $\times$ „orel“.
Otázka: *je tato mince „spravedlivá“?*

Úloha **teorie pravděpodobnosti**: matematicky popsat pravděpodobnostní model, kterým se řídí „spravedlivá“ mince

Úloha **matematické statistiky**: na základě naměřených hodnot (56 $\times$ „hlava“ a 44 $\times$ „orel“) rozhodnout, zda se mince řídí daným modelem nebo nějakým jiným modelem

Pokud se umíme na základě naměřených hodnot rozhodnout pro správný model, umíme pak odpovědět na další otázky:

- Jaká je pravděpodobnost, že ve 100 pokusech padne vždy „orel“? Je to vůbec možné?
- Jaká je pravděpodobnost, že toto nastane při 5, 10, 50 pokusech?
- Jaké je riziko, že jsme zvolili špatný model?

Motivační příklady

Příklad 2

Sledujeme počet vadných pixelů na 50 náhodně vybraných monitorech. Naměřené hodnoty jsou $(0, 3, 1, 2, 5, \dots)$.
Otázka: *Jaký je „očekávaný" počet vadných pixelů na monitorech naší firmy?*

Úloha **teorie pravděpodobnosti**:	matematicky popsat model, kterým se řídí počet vadných pixelů
Úloha **matematické statistiky**:	na základě naměřených hodnot rozhodnout, jaké jsou parametry tohoto modelu

Pokud se umíme na základě naměřených hodnot rozhodnout pro správný model, umíme pak odpovědět na další otázky:

- Jaké je procento monitorů s 0 vadnými pixely? (marketing)
- Jaké je procento monitorů s více než 5 vadnými pixely? (reklamace)
- Jaké je riziko, že jsme zvolili špatný model?

Motivační příklady

Příklad 3

Balicí linka plní 1 kg balíčky mouky. Sledujeme hmotnost 20 náhodně vybraných balíčků. Naměřené hodnoty v gramech jsou $(987{,}3; 991{,}1; 1009{,}2; \dots)$.
Otázka: *Jaká je „očekávaná“ hmotnost jednoho balení?*

Úloha **teorie pravděpodobnosti**:	matematicky popsat model, kterým se řídí hmotnost jednoho balení
Úloha **matematické statistiky**:	na základě naměřených hodnot rozhodnout, jaké jsou parametry tohoto modelu

Pokud se umíme na základě naměřených hodnot rozhodnout pro správný model, umíme pak odpovědět na další otázky:

- Jaké je procento balíčků s hmotností větší než 1 kg? (ztráty)
- Jaká je přesnost plnicí linky? (srovnání více linek)
- Jaké je procento balíčků splňujících nějakou normu? (inspekce)

Teorie pravděpodobnosti

Teorie pravděpodobnosti se zabývá matematickými modely náhodných dějů, jejichž výsledek není jednoznačně určen. Takovému náhodnému jevu budeme říkat **náhodný pokus**.

Výsledkem takového pokusu může být

- *číslo*, například počet bodů na horní straně hrací kostky při jednom vrhu, nebo počet vrhů hrací kostkou než padne šestka,
- naměřená *veličina*, například krevní tlak pacienta,
- *číselné vektory* a *posloupnosti*, časový průběh nějaké *funkce* na daném intervalu
- libovolný *kvalitativní ukazatel*, například vytažení koule dané barvy z osudí obsahující různorodé barvy, odpověď ano či ne respondenta při průzkumu mínění.

Náhodný pokus

O **náhodném pokusu** hovoříme tedy tehdy, když

- konáme pokus, jehož výsledek **není jednoznačně určen** podmínkami, za nichž je prováděn;
- přitom nás zajímají jen takové pokusy, u kterých sledovaný jev, označme jej A, vykazuje v opakovaných pokusech jakousi **stabilitu** (tzv. **statistickou stabilitu**), tj. relativní četnost $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ výskytu jevu A v posloupnosti n „nezávislých" pokusů má tendenci při velkých hodnotách n se příliš neměnit

Dále již budeme předpokládat, že **náhodný** (nebo též **stochastický**) pokus je statisticky stabilní.

Značení

Ω **prostor elementárních jevů**, který chápeme jako množinu všech možných „nejjemnějších“ (tj. těch, které lze ještě rozlišovat) výsledků daného pokusu.
Předpokládá se, že

- $\Omega \neq \emptyset$ je neprázdná abstraktní množina,
- počet jejich prvků může být konečný, spočetný i nespočetný,
- je vyčerpávající, tj. obsahuje absolutně všechny možné výsledky,
- výsledky jsou neslučitelné.

ω **elementární jev**, který chápeme jako jednobodovou množinu. Například při jednom hodu kostkou jsou elementárními jevy jednotlivé možné výsledky, tj. padnutí 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Značení

$A, B, \dots$ $A_1, \dots, A_n$	**jevy** (značené velkými písmeny ze začátku abecedy) získáme množinovými operacemi nad elementárními jevy. Speciálními jevy jsou: $\emptyset$ **nemožný** jev Ω **jistý** jev
$\exp \Omega = 2^{\Omega}$	systém všech podmnožin množiny Ω.

Například při jednom hodu kostkou kromě elementárních jevů (padnutí 1, 2, 3, 4, 5, 6) můžeme uvažovat i další jevy jako je padnutí sudého či lichého čísla, padnutí čísla menšího než šest, apod.

Značení

Mezi jednotlivými jevy mohou platit různé vztahy a můžeme pomocí nich vytvářet nové jevy, například

$C = A \cup B$	jev C nastane, pokud nastane jev A nebo jev B
$C = A \cap B$	jev C nastane, pokud společně nastane jev A i jev B. Pokud $A \cap B = \emptyset$, jevy A a B se nazývají **neslučitelné**.
$C = A - B$	jev C nastane, pokud nastane jev A při vyloučení (nenastoupení) jevu B
$\overline{A} = \Omega - A$	jev $\overline{A}$ je jev opačný k jevu A
$C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$	jev C nastane, pokud nastane alespoň jeden z jevů $A_1, \ldots, A_n, \ldots$
$C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$	jev C nastane, pokud nastanou všechny jevy $A_1, \ldots, A_n, \ldots$

Jevové pole

Definice 1

Mějme neprázdnou množinu $\Omega \neq \emptyset$ a neprázdný systém podmnožin $\mathcal{A} \subseteq \exp \Omega$, pro který platí

$$
\begin{array}{rlcll}
(i) & \Omega \in \mathcal{A} & & & \\
(ii) & A \in \mathcal{A} & \Rightarrow & \overline{A} \in \mathcal{A} & \\
(iii) & A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} & \Rightarrow & \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} & (\sigma \text{ aditivita}),
\end{array}
$$

pak $\mathcal{A}$ nazýváme **jevovou σ–algebrou na Ω**, dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ nazýváme **jevové pole** (events field) a libovolný prvek $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodný jev** (random event) (vzhledem k $(\Omega, \mathcal{A})$).

Příklady jevového pole

Ad **Příklad 1**

prostor elementárních jevů:	$\Omega = \{$„hlava";„orel"$\}$
elementární jevy:	$\omega_1 =$„hlava", $\omega_2 =$„orel"
jevová $\sigma-$ algebra:	$\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_1, \omega_2, \Omega\}$
interpretace jevů:	$A = \emptyset$ … „nepadne ani hlava ani orel" nebo „padne hlava a současně orel"
	$B = \omega_1$ … „padne hlava"
	$C = \omega_2$ … „padne orel"
	$D = \Omega$ … „padne hlava nebo orel"

Příklady jevového pole

Ad **Příklad 2**:

Označme $N = 1600 \times 1200$ počet všech pixelů na monitoru.

prostor elem. jevů: $\Omega = \{$„0 vadných“;„1 vadný“;… „N vadných“$\}$

elementární jevy: $\omega_i =$„i vadných“, $i = 1, \dots, N$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_0, \{\omega_1, \dots, \omega_N\}, \Omega\}$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_0, \omega_1, \{\omega_0, \omega_1\}, \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}, \{\omega_0, \omega_2, \dots, \omega_N\}, \{\omega_2, \dots, \omega_N\}, \Omega\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$$

interpretace jevů:

$A = \{\omega_0\} \cap \{\omega_1\} = \emptyset$ … „není žádný vadný a současně je jeden vadný pixel“

$B = \{\omega_0\} \cup \{\omega_1\}$ … „není žádný vadný nebo je jeden vadný pixel“

$C = \Omega - \{\omega_0\}$ … „alespoň jeden pixel je vadný“

Příklady jevového pole

Ad **Příklad 3**:

prostor elem. jevů: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

elementární jevy: $\omega = x$ (hmotnost balíčku v gramech)

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega) \subseteq 2^{\Omega}$ … „borelovská“ $\sigma-$ algebra

interpretace jevů:

$A = \{638{,}8745\}$ … „hmotnost balíčku je právě 638,8745 g“

$B = \{871\} \cup \{934{,}216\}$ … „hmotnost balíčku je 871 g nebo 934,216 g“

$C = \langle 0; 978)$ … „hmotnost balíčku je menší než 978 g“

Vlastnosti jevového pole

de Morganovy vzorce

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je jevové pole, $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$. Pak platí

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \tag{1}$$

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n \tag{2}$$

Věta 2

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je jevové pole. Pak platí

$$\begin{array}{lll}
(1) & \emptyset \in \mathcal{A} & \\
(2) & A_1, A_2 \in \mathcal{A} & \Rightarrow \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \\
 & & \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \\
 & & \quad A_1 - A_2 \in \mathcal{A} \\
(3) & A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A} & \Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}
\end{array}$$

Vlastnosti jevového pole

Definice 3

Horní limitou posloupnosti jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme množinu všech $\omega \in \Omega$, které patří do nekonečně mnoha množin A_n. Označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

Dolní limitu posloupnosti jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ definujeme jako množinu všech $\omega \in \Omega$, které patří do všech množin A_n s výjimkou konečného počtu těchto množin. Označujeme $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

Věta 4

Pro posloupnosti jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\
&(2) \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\
&(3) \quad \overline{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \overline{A_n}
\end{aligned}
$$

Vlastnosti jevového pole

Definice 5 (Limita posloupnosti jevů)

Řekneme, že posloupnost náhodných jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** A, právě když
$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$
Píšeme $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Věta 6

Pokud existuje limita posloupnosti náhodných jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Věta 7

(1) *Je-li $A_n \subseteq A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ $\Rightarrow$ $\exists\, A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ a platí $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.*

(2) *Je-li $A_n \supseteq A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ $\Rightarrow$ $\exists\, A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ a platí $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.*