M3121 Pravděpodobnost a statistika I

2. Pravděpodobnost

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Definice pravděpodobnostního prostoru

Definice 1 (Axiomatická definice pravděpodobnosti)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je jevové pole a P je množinová funkce definovaná na $\mathcal{A}$ s vlastnostmi

(i) $P(\Omega) = 1$ (tj. P je **normovaná**)

(ii) pro $\forall\, A \in \mathcal{A}$ je $P(A) \geq 0$ (tj. P je **nezáporná**)

(iii) je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$posloupnost náhodných jevů, které jsou po dvou neslučitelné, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

(tj. P je σ**–aditivní**)

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** (**probability**) a trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **pravděpodobnostním prostorem**.

Klasická pravděpodobnost

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$	konečná množina elementárních jevů
$\mathcal{A} = 2^\Omega$	$\mathcal{A}$ je systém všech podmnožin množiny Ω
P	pravděpodobnost libovolného jevu $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{A}$
	je rovna $P(A) = \sum\limits_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j})$, přitom platí $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$.

Jestliže platí $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ mluvíme o **klasickém** pravděpodobnostním prostoru, ve kterém platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|A|$ značí počet elementárních jevů v A.

Příklady na klasickou pravděpodobnost

Ad **Příklad 1**

prostor elementárních jevů: $\Omega = \{$„hlava“;„orel“$\}$ konečná, tj. $|\Omega| = 2$

elementární jevy: $\omega_1 =$„hlava“, $\omega_2 =$„orel“

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_1, \omega_2, \Omega\} = 2^\Omega$

Model „spravedlivé“ mince:

Pravděpodobnost: $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}$

$$P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = \frac{0}{2} = 0$$

$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{2}{2} = 1$$

Ad **Příklad 2**

V případě, že by počet vadných pixelů byl náhodný a každá možnost stejně pravděpodobná $\Rightarrow$ klasická pst. V praxi však jsou psti různé a s klasickým modelem si nevystačíme. Je třeba modelovat jinak, např. Poissonovo rozdělení.

Ad **Příklad 3**

Ω není konečná.

Příklady na klasickou pravděpodobnost

Příklad 1 (S čerty nejsou žerty)

Princezna si vybírá ženicha z 5 princů tak, že náhodně hodí zlaté jablko a ten, ke komu se dostane, stane se jejím ženichem.

prostor elem. jevů: $\Omega = \{$„princ 1“,…,„princ 5“$\}$ konečná, tj. $|\Omega| = 5$

elementární jevy: $\omega_i =$„princ i“, $i = 1, \dots, 5$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \{\emptyset, \omega_1, \dots, \omega_5, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \dots, \Omega\} = 2^\Omega$

Model „spravedlivé“ koule:

Pravděpodobnost: $P(\omega_i) = \frac{1}{5}$

$$P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\begin{aligned} P(\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}) &= P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_3\} \cup \{\omega_5\}) \\ &= P(\omega_1) + P(\omega_3) + P(\omega_5) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{5}{5} = 1$$

Příklady na klasickou pravděpodobnost

Příklad 2 (Párty)

Tři kamarádi (Aleš, Boris, Cyril) přijedou svými auty na luxusní párty a odevzdají klíče na recepci, aby jim byla auta zaparkována. Roztržitý recepční si však nepoznačí klíče a tak neví, komu jaké vrátit. Kamarádi odcházejí společně, a tak se rozhodne, že jim klíče rozdá náhodně.

prostor elem. jevů:	$\Omega = \{$AaBbCc,AbBaCc,...,AbBcCa$\}$, tj. $\|\Omega\| = 6$, kde velké písmeno značí člověka a malé písmeno klíče
elementární jevy:	ω_i = posloupnost střídajících se 3 velkých a 3 malých písmen, $i = 1, \ldots, 6$
jevová $\sigma-$ algebra:	$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

Model „roztržitého" recepčního:

PST: $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$

A = „Pouze Cyril dostane svoje klíče" $\Rightarrow A = \{$AbBaCc$\}$, tj. $|A| = 1$

A = „Alespoň Cyril dostane svoje klíče" $\Rightarrow A = \{$AaBbCc$\} \cup \{$AbBaCc$\}$, tj. $|A| = 2$

Příklady na klasickou pravděpodobnost

Příklad 3 (Kulečník)

Sedm kamarádů si chce zahrát kulečníkový turnaj. Náhodně losují 3 dvojice, které spolu budou hrát v 1. kole. Hráč, který zůstane navíc, dostane „divokou“ kartu.

prostor elem. jevů: $\Omega = \{\{AB, CD, EF\}, \{AB, CD, EG\}, \dots, \{BC, DE, FG\}\}$,
tj. $|\Omega| = \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{3!} = 105$, kde velké písmeno značí hráče

elementární jevy: $\omega_i =$ množina tří dvojic hráčů, v nichž se žádný neopakuje a nezáleží na pořadí, $i = 1, \dots, 105$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

Model „náhodného“ losu:

PST: $P(\omega_i) = \frac{1}{105}$

$A =$ „Hráč A dostane divokou kartu“ $\Rightarrow A = \{\{BG, CD, EF\}, \{BF, CD, EG\}, \dots, \{BC, DE, FG\}\}$, tj. $|A| = 15$, $P(A) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}$

$A =$ „Kamarádi A a B se potkají už v 1. kole“ $\Rightarrow A = \{\{AB, CD, EF\}, \{AB, CD, EG\}, \dots, \{AB, DE, FG\}\}$, tj. $|A| = 15$, $P(A) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}$

Geometrická pravděpodobnost

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$	borelovská podmnožina
$\mathcal{A} = \mathcal{B}^n(\Omega)$	$\mathcal{A}$ je nejmenší borelovská σ–algebra nad Ω
P	pravděpodobnost jevu A je rovna $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde Lebesgueova míra μ je konečná a kladná.

Příklady na geometrickou pst

Příklad 4

Náhodně vybereme reálné číslo z intervalu $\langle 0;1\rangle$.

prostor elem. jevů: $\Omega = \langle 0;1\rangle$

elementární jevy: $\omega = x,\ x \in \langle 0;1\rangle$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\langle 0;1\rangle)$

Model „náhodného" výběru čísla:

PST: $P(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = 1$, délka intervalu

$A = (a;b)$ nebo $A = \langle a;b\rangle$, $0 \le a < b \le 1$, $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{b-a}{1}$

$A = \{x\}, P(A) = \mu(\{x\}) = 0$

Příklady na geometrickou pst

Příklad 5

Náhodně vybereme bod z množiny $\langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle$.

prostor elem. jevů: $\Omega = \langle 0;1\rangle^2$

elementární jevy: $\omega = (x,y),\ x \in \langle 0;1\rangle,\ y \in \langle 0;1\rangle$

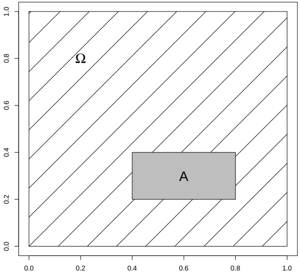
jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\langle 0;1\rangle^2)$

Model „náhodného“ výběru bodu:

PST: $\mu(\Omega) = 1 \cdot 1$, obsah čtverce

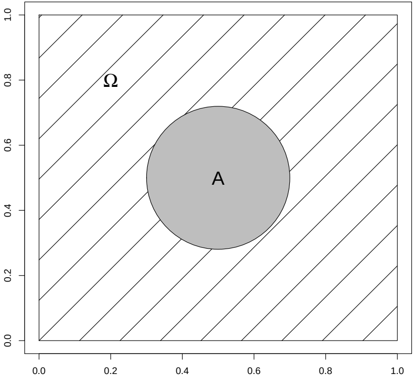
$A = (0,4;0,8) \times \langle 0,2;0,4\rangle,$

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(0{,}8-0{,}4)(0{,}4-0{,}2)}{1} = 0,08$



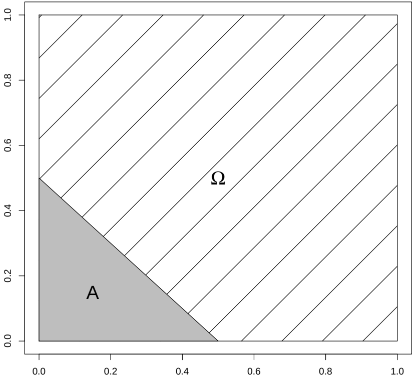
Příklady na geometrickou pst

$$A = \{(x,y) \in \langle 0;1\rangle^2;\ (x-0,5)^2 + (y-0,5)^2 \leq 0,2^2\}$$
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi 0{,}2^2}{1} = 0,1257$$



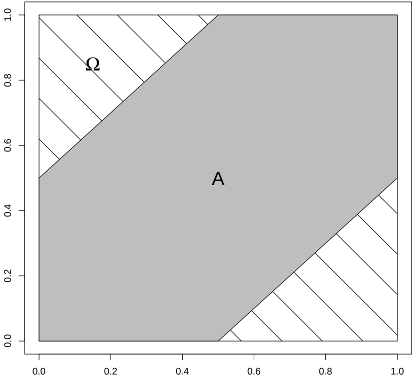
Příklady na geometrickou pst

$A = \{(x, y) \in \langle 0; 1\rangle^2;\ x + y \leq 0,5\}$
$P(A) = \mu(A)/1 = 0,5^2/2 = 0,125$



Příklady na geometrickou pst

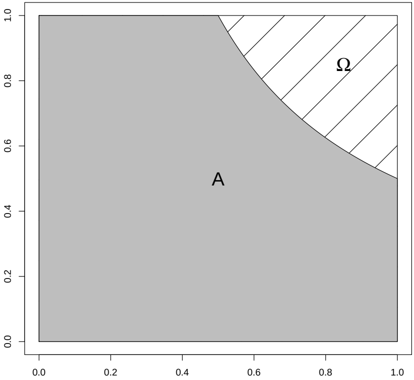
$A = \{(x, y) \in \langle 0; 1\rangle^2;\ |x - y| \leq 0,5\}$
$P(A) = \mu(A)/1 = 1 - 0,5^2 = 0,75$



Příklady na geometrickou pst

$$A = \{(x, y) \in \langle 0; 1\rangle^2;\ xy \leq 0,5\}$$

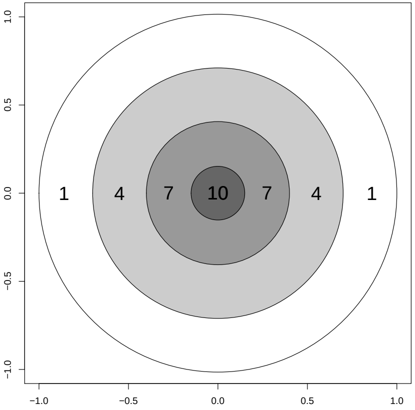
$$P(A) = \mu(A)/1 = 0,5 + \int_{0,5}^{1} \frac{1}{2x} dx = 0,8466$$



Příklady na geometrickou pst

Příklad 6 (Střelec)

Střelec střílí na terč o poloměru $1\,m$ *a předpokládáme, že se vždy trefí. Poloměry jednotlivých výsečí jsou* $0,15; 0,4; 0,7; 1$.



Příklady na geometrickou pst

prostor elem. jevů: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$, tj. $\mu(\Omega) = \pi \cdot 1^2 = \pi$

elementární jevy: $\omega = (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$

Model „náhodného“ střelce:

PST: $P(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi}{\pi} = 1$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 0,15^2\}$ ... „střelec trefí 10“

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 0,15^2}{\pi} = 0,0225$$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0,15^2 < x^2+y^2 \leq 0,4^2\}$ ... „střelec trefí 7“

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 0,4^2 - \pi \cdot 0,15^2}{\pi} = 0,1375$$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0,4^2 < x^2+y^2 \leq 0,7^2\}$ ... „střelec trefí 4“

$$P(C) = \frac{\mu(C)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 0,7^2 - \pi \cdot 0,4^2}{\pi} = 0,33$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0,7^2 < x^2+y^2 \leq 1\}$ ... „střelec trefí 1“

$$P(D) = \frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \cdot 1 - \pi \cdot 0,7^2}{\pi} = 0,51$$

Příklady na geometrickou pst

Jiný „pohled“ na Příklad 6:

prostor elem. jevů: $\Omega = \{1, 4, 7, 10\}$, tj. $|\Omega| = 4$

elementární jevy: $\omega_i = 3i - 2,\ i = 1, \ldots, 4$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

- Jedná se o **klasickou** pst?
- Jak by se definoval „náhodný“ střelec?

Psti elementárních jevů:

PST: $A = \{\omega_4\}$ … „střelec trefí 10“

$P(A) = 0,0225$

$B = \{\omega_3\}$ … „střelec trefí 7“

$P(B) = 0,1375$

$C = \{\omega_2\}$ … „střelec trefí 4“

$P(C) = 0,33$

$D = \{\omega_1\}$ … „střelec trefí 1“

$P(D) = 0,51$

Příklady na geometrickou pst

Příklad 7

Tramvaj jezdí v 10 minutových intervalech. Náhodně přijdeme na zastávku a měříme čas čekání na tramvaj.

prostor elem. jevů: $\Omega = \langle 0; 10 \rangle$

elementární jevy: $\omega = x,\ x \in \langle 0; 10 \rangle$

jevová $\sigma-$ algebra: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\langle 0; 10 \rangle)$

Model „náhodného" příchodu:

PST: $\mu(\Omega) = 10$, délka intervalu

$A = (0; 2)$, ... „čekám méně než 2 minuty"

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2}{10} = 0,2$$

$B = (6; 10)$, ... „čekám více než 6 minut"

$$P(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{10-6}{10} = 0,4$$

Vlastnosti pravděpodobnosti

Věta 2

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor. Pak pravděpodobnost* P *má následující vlastnosti:*

(1) $P(\emptyset) = 0$

(2) $A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(3) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad P(B - A) = P(B) - P(A)$

(4) $\quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$

(5) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

(6) $\quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(7) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Vlastnosti pravděpodobnosti

Věta - pokračování

(8) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j)$

$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots$$

$$\ldots (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

(9) $\quad \Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$

Vlastnosti pravděpodobnosti

Věta 3 (Spojitost pravděpodobnosti)

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ *je jevové pole,* P *reálná množinová funkce definovaná na* $\mathcal{A}$ *s vlastnostmi:*

$$
\begin{array}{ll}
(i) & P(\Omega) = 1 \\
(ii) & \textit{pro } \forall\, A \in \mathcal{A} : P(A) \geq 0 \\
(iii) & A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)\ (\textit{aditivita})
\end{array}
$$

pak následující vlastnosti jsou **ekvivalentní***:*

(1) P *je pravděpodobnost na* $(\Omega, \mathcal{A})$*.*

(2) spojitost pravděpodobnosti **zdola***:*

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A},\ A_n \subseteq A_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n \to \infty} A_n\right)$$

Vlastnosti pravděpodobnosti

Věta - pokračování

(3) *spojitost pravděpodobnosti* **shora***:*

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A},\ A_n \supseteq A_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

(4) *spojitost pravděpodobnosti* **shora v nule***:*

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A},\ A_n \supseteq A_{n+1},\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Věta 4

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor,* $A_n \in \mathcal{A}$ *pro* $n = 1, 2, \ldots$ *a existuje limita* A_n*. Pak platí* $P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$*.*

Věta 5 (Cantelliho lemma)

Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost náhodných jevů na* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *taková, že* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$*, pak* $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$*.*